

## ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE · BAND 41 · HEFT 4 · 1942

*Über die Berechnung des Schallfeldes  
unmittelbar vor einer kreisförmigen Kolbenmembran*

*Von H. Stenzel*

(Mit 6 Abbildungen)

1. Allgemeines

Die Frage nach der Beschaffenheit eines Schallfeldes, das sich unmittelbar vor einer in starrer Wand schwingenden, kreisförmigen Kolbenmembran ausbildet, ist in letzter Zeit wiederholt behandelt worden. Zuerst gab wohl Mc Lachlan<sup>1)</sup> eine allgemeine Formel an, nach der er den Schalldruck für  $\frac{2\pi a}{\lambda} \leq 2$  ( $a$  = Membranradius,  $\lambda$  = Wellenlänge) vor der Membran berechnen konnte. Dann gab L. V. King<sup>2)</sup> eine allgemeine Lösung für beliebig gelegene Aufpunkte in Form eines Integrales an und entwickelte daraus die Lösung für Aufpunkte in der Membranebene in Form von unendlichen Reihen. Vom Verf.<sup>3)</sup> wurden auf Grund allgemeiner Formeln eine Reihe von Beispielen für  $\frac{2\pi a}{\lambda} \leq 10$  berechnet. Schließlich stellte A. Thoma<sup>4)</sup> eine Untersuchung über den Zusammenhang der von Backhaus<sup>5)</sup>, King und dem Verf. abgeleiteten Formeln an. Alle diese Ableitungen waren für die praktische Berechnung bei größerem Membranradius ziemlich ungeeignet, sei es, daß die Konvergenz zu schlecht, d. h. die Anzahl der zur Berechnung erforderlichen Glieder zu groß wurde, sei es, daß die auftretenden Funktionen für größere Werte von  $2\pi a/\lambda$  nicht mehr in Tabellenform berechnet vorlagen. Hierauf hat neuerdings A. Schoch<sup>6)</sup> hingewiesen und gezeigt, daß es in diesem Falle zweckmäßig ist, das Schallfeld aus zwei Anteilen, einer ebenen Welle und einer Beugungswelle, die vom Rand der Membran ausgeht, zusammenzusetzen.

1) N. W. Mc Lachlan, Phil. Mag. 14. S. 1012. 1932.

2) K. V. King, Canad. J. Res. 11. S. 135. 1934.

3) H. Stenzel, Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen, 1939, S. 73.

4) A. Thoma, Zur Konfiguration des Schallfeldes der kreisförmigen Kolbenmembran. Dissert. 1940, Karlsruhe.

5) H. Backhaus, Ann. d. Phys. [5] 5. S. 1. 1930.

6) A. Schoch, Akust. Ztschr. 6. S. 318. 1941.

Im folgenden wird gezeigt, daß sowohl die von King als auch die von Schoch in Form eines Integrales angegebene Lösung zu derselben Reihenentwicklung führt, und daß diese für eine strenge Berechnung des Schallfeldes in der Membranebene auch für größere  $2\pi a/\lambda$  vorteilhaft ist. Als Beispiel werden die Fälle  $za = 10, 20, 40, 60$  für den Bereich  $0 \leq z\varrho \leq 20$  ( $\varrho$  = Aufpunktsabstand vom Membranmittelpunkt) berechnet und durch Kurven graphisch dargestellt. Am Schluß wird noch gezeigt, daß auch ein früher vom Verf. angegebener Ausdruck für die eine Schalldruckkomponente unmittelbar aus dem Integral von King hergeleitet werden kann.

## 2. Die Ableitung der Formeln aus der Integraldarstellung nach King

In der allgemeinen Lösung von King<sup>1)</sup>:

$$(1) \quad \Phi = a \dot{x} \int_0^{\infty} e^{-\mu z} J_0(\lambda \varrho) J_1(\lambda a) \frac{d\lambda}{\mu}, \quad \mu = \sqrt{\lambda^2 - z^2}$$

führen wir an Stelle des Geschwindigkeitspotentials  $\Phi$  den Schalldruck  $p$  ein:

$$(2) \quad p = -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c \cdot \sigma \cdot i z \Phi$$

und charakterisieren diesen durch die relativen Druckkomponenten  $p_a$  und  $p_m$ . Wir setzen also:

$$(3) \quad p = c \cdot \sigma \cdot \dot{x} (p_a + i p_m),$$

so daß  $c \cdot \sigma \dot{x} \cdot p_a$  die Druckkomponente bedeutet, welche mit der Membranschnelle  $\dot{x}$  in Phase ist, während  $c \cdot \sigma \dot{x} p_m$  die Druckkomponente bedeutet, welche zu ihr eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$  besitzt. Dabei ist  $c$  die Schallgeschwindigkeit,  $\sigma$  die Dichte,  $z$  die Wellenzahl,  $a$  der Membranradius,  $\varrho$  und  $z$  die Koordinaten des Aufpunktes.

Wir betrachten nur Aufpunkte in der Membranebene  $z = 0$ . Dann erhalten wir aus (1), (2) und (3), wenn wir das Integral in seinen reellen und imaginären Bestandteil zerlegen:

$$(4) \quad p_a + i p_m = z a \int_0^{\infty} \frac{J_0(\lambda \varrho) J_1(\lambda a)}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}} d\lambda + i z a \int_{\infty}^{\infty} \frac{J_0(\lambda \varrho) J_1(\lambda a)}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}} d\lambda.$$

Wir betrachten zunächst nur die reelle Komponente und führen eine neue Integrationsvariable  $\vartheta$  durch  $\lambda = z \sin \vartheta$  ein und erhalten:

$$(5) \quad p_a = z a \int_0^{\pi/2} J_0(z \varrho \sin \vartheta) J_1(z a \sin \vartheta) d\vartheta.$$

1) K. V. King, a. a. O.

Um das Integral auszuwerten, werden wir einmal  $J_1(xa \sin \vartheta)$ , das andere Mal  $J_0(x\rho \sin \vartheta)$  nach Potenzen von  $\cos^2 \vartheta$  entwickeln. Dazu benutzen wir folgende Formel<sup>1)</sup>:

$$(6) \quad (z+h)^{-1/2} J_\nu(\sqrt{z+h}) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{h^m \cdot z^{-1/2(\nu+m)}}{2^m \cdot m!} J_{\nu+m}(\sqrt{z}).$$

Setzen wir  $\nu = 1$ ,  $z = x^2 a^2$ ,  $h = -x^2 a^2 \cos^2 \varphi$ , so folgt aus (6):

$$(7) \quad \frac{J_1(\sqrt{x^2 a^2 - x^2 a^2 \cos^2 \varphi})}{(\sqrt{x^2 a^2 - x^2 a^2 \cos^2 \varphi})} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(xa)^{2m} \cdot \cos^{2m} \varphi J_{m+1}(xa)}{2^m \cdot m! (xa)^{m+1}}.$$

Damit ergibt sich aus (5):

$$(8) \quad p_a = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(xa)^{m+1} J_{m+1}(xa)}{2^m \cdot m!} \int_0^{\pi/2} J_0(x\rho \sin \vartheta) \cos^{2m} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta.$$

Hier lassen sich die auftretenden Integrale aus der bekannten Beziehung<sup>2)</sup>:

$$(9) \quad J_{\mu+v+1}(z) = \frac{z^{\nu+1}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \int_0^{\pi/2} J_\mu(z \sin \vartheta) \cos^{2\nu+1} \vartheta \sin^{\mu+1} \vartheta d\vartheta$$

berechnen. Indem wir  $\mu = 0$ ,  $2\nu + 1 = 2m$  und

$$2^m \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m - 1$$

in (9) einsetzen, finden wir:

$$(10) \quad \int_0^{\pi/2} J_0(x\rho \sin \vartheta) \cos^{2m} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} z \rho \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m - 1}{(x\rho)^{m+1}} J_{m+1/2}(x\rho).$$

Schließlich führen wir noch die Funktion<sup>3)</sup>

$$(11) \quad S_m(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} z J_{m+1/2}(z)$$

ein und erhalten als Resultat für  $a < \rho$ :

$$(12) \quad p_a = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m - 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{m+1} J_{m+1}(xa) S_m(x\rho),$$

dabei ist  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m - 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}$  für  $m = 0$  gleich 1 zu setzen. Um  $p_a$

1) G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge 1922, S. 140 (1).

2) G. N. Watson, a. a. O. S. 372 (1).

3) G. N. Watson, a. a. O. S. 659.

für  $a > \rho$  zu finden, entwickeln wir  $J_0(\sqrt{x^2 \rho^2 - x^2 \rho^2 \cos^2 \vartheta})$ , indem wir in (6)  $v = 0$ ,  $z = x^2 \rho^2$ ,  $h = -x^2 \rho^2 \cos^2 \vartheta$  einführen:

$$(13) \quad J_0(\sqrt{x^2 \rho^2 - x^2 \rho^2 \cos^2 \vartheta}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x^2 \rho^2 \cos^2 \vartheta)^m}{2^m \cdot m!} \frac{J_m(x \rho)}{(x \rho)^m}.$$

Damit ergibt sich aus (5):

$$(14) \quad p_a = x a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x \rho)^m}{2^m \cdot m!} J_m(x \rho) \int_0^{\pi/2} \cos^{2m} \vartheta J_1(x a \sin \vartheta) d\vartheta.$$

Zur Auswertung des Integrales beweisen wir die folgende Beziehung:

$$(15) \quad x \int_0^{\pi/2} J_1(x \sin \vartheta) \cos^{2m} \vartheta d\vartheta = 1 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{x^m} S_{m-1}(x).$$

Dazu schreiben wir (10) in der Form:

$$(16) \quad \int_0^{\pi/2} J_0(x \sin \vartheta) \cos^{2m} \vartheta \cdot x \sin \vartheta d\vartheta = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1 \frac{S_m(x)}{x^m}$$

und integrieren beide Seiten nach  $x$  von 0 bis  $x$ . Dann geht die linke Seite wegen:

$$\int_0^x J_0(x \sin \vartheta) x \sin \vartheta d\vartheta = x J_1(x \sin \vartheta)$$

in die linke Seite von (15) über. Und aus der rechten Seite folgt wegen:

$$\int_0^x \frac{S_m(x)}{x^m} dx = \left[ -\frac{S_{m-1}(x)}{x^m} \right]_0^x = -\frac{S_{m-1}(x)}{x^m} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}$$

die rechte Seite von (15).

Damit ergibt sich aus (14) und (15):

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_a = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x \rho)^m}{2^m \cdot m!} J_m(x \rho) - J_0(x \rho) \cos x a \\ \quad - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \left(\frac{\rho}{a}\right)^m J_m(x \rho) S_{m-1}(x a). \end{array} \right.$$

Berücksichtigen wir ferner, daß wegen (13), wenn man darin  $\cos \vartheta = 1$  und  $xa = x\rho$  setzt, die Beziehung folgt:

$$(18) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x \rho)^m}{2^m \cdot m!} J_m(x \rho) = 1,$$

so haben wir für  $a > \varrho$  das Ergebnis:

$$(19) \quad p_a = 1 - \cos x a J_0(x\varrho) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \left(\frac{\varrho}{a}\right)^m J_m(x\varrho) S_{m-1}(xa).$$

Für die imaginäre Komponente erhalten wir zunächst aus (4), indem wir an Stelle  $\lambda$  die neue Integrationsvariable  $l$  durch  $l^2 = \lambda^2 - x^2$  einführen:

$$(20) \quad p_m = x a \int_0^{\infty} J_0(\varrho \sqrt{x^2 + l^2}) \frac{J_1(a \sqrt{x^2 + l^2})}{\sqrt{x^2 + l^2}} dl.$$

Ähnlich wie für die reelle Komponente werden wir auch hier für  $a < \varrho$   $\frac{J_1(a \sqrt{x^2 + l^2})}{a \sqrt{x^2 + l^2}}$  und für  $a > \varrho$   $J_0(\varrho \sqrt{x^2 + l^2})$  nach (6) entwickeln. Setzen wir in (6)  $\nu = 1$ ,  $h = a^2 l^2$ ,  $z = x^2 a^2$ , so folgt:

$$(21) \quad \frac{J_1(a \sqrt{x^2 + l^2})}{a \sqrt{x^2 + l^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(a^2 l^2)^m}{2^m \cdot m!} \frac{J_{m+1}(xa)}{(xa)^{m+1}}.$$

Die damit in (20) auftretenden Integrale werden [nach Watson<sup>1)</sup>] für  $\nu = 0$ ,  $2\mu + 1 = 2m$  durch:

$$(22) \quad \int_0^{\infty} J_0(\varrho \sqrt{x^2 + l^2}) l^{2m} dl = \frac{2^{m-1/2} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\varrho^{m+1/2} \cdot x^{-m-1/2}} J_{-m-1/2}(xa)$$

gefunden. Führen wir noch die Funktion  $C_m(x)$  ein durch<sup>2)</sup>:

$$(23) \quad C_m(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} x J_{-m-1/2}(x),$$

so haben wir  $a < \varrho$  das Ergebnis:

$$(24) \quad p_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \left(\frac{\varrho}{a}\right)^{m+1} J_{m+1}(xa) C_m(x\varrho).$$

Für  $a > \varrho$  erhalten wir aus (6) für  $\nu = 0$ :

$$(25) \quad J_0(\varrho \sqrt{x^2 + l^2}) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\varrho^2 l^2)^m}{2^m \cdot m!} \frac{J_m(x\varrho)}{(x\varrho)^m}$$

und die damit in (20) auftretenden Integrale finden wir [nach Watson<sup>1)</sup>] für  $\nu = 1$ ,  $2\mu + 1 = 2m$ :

$$(26) \quad \int_0^{\infty} \frac{J_1(a \sqrt{x^2 + l^2})}{\sqrt{x^2 + l^2}} l^{2m} dl = \frac{2^{m-1/2} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{a^{m+1/2} \cdot x^{-m+1/2}} J_{-m+1/2}(xa).$$

1) G. N. Watson, a. a. O. S. 417(5).

2) G. N. Watson, a. a. O. S. 659.

Unter Berücksichtigung von (23), (25) und (26) folgt dann für  $a > \rho$ :

$$(27) \quad p_m = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} J_m(x\rho) C_{m-1}(xa) \left(\frac{\rho}{a}\right)^m.$$

(Dabei ist für  $m=0$  das erste Glied  $-J_0(x\rho)C_{-1}(xa) = +J_0(x\rho)\sin(xa)$  zu setzen.) Wir fassen das Ergebnis von (12), (19), (24) und (27) zusammen. Es ist für  $a < \rho$ :

$$(28) \quad p_a + i p_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{m+1} J_{m+1}(xa) [S_m(x\rho) + i C_m(x\rho)]$$

und für  $a > \rho$ :

$$(29) \quad \begin{cases} p_a + i p_m = 1 - e^{-ixa} \cdot J_0(x\rho) \\ \quad - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \left(\frac{\rho}{a}\right)^m J_m(x\rho) [S_{m-1}(xa) + i C_{m-1}(xa)]. \end{cases}$$

### 3. Die Ableitung der Formeln aus der Integraldarstellung nach Schoch

Um in Übereinstimmung mit King zu bleiben, müssen wir die Membranschnelle  $w$  durch  $-\dot{x}$  bei Schoch ersetzen. Dann erhalten wir aus dem Ansatz von Schoch für  $a > \rho$ :

$$(30) \quad \Phi = -\frac{\dot{x}}{ix} e^{-ixa} + \frac{\dot{x}}{ix} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-isr_1} d\varphi$$

wegen (2) und (3) die Beziehung:

$$(31) \quad p_a + i p_m = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-isr_1} d\varphi.$$

Dabei ist  $r_1$  der zum Winkel  $\varphi$  gehörige Radiusvektor  $PB = r_1$  (vgl. Abb. 1). Um die Integration in (31) ausführen zu können, müssen wir  $r_1$  durch die Integrationsvariable  $\varphi$  ausdrücken. Zeichnen wir in der Figur der Abb. 1 das Lot  $OC$  auf das zum Winkel  $\varphi$  gehörige  $r_1 = PB$ , so folgt:

$$r_1 = BC - PC = \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} - \rho \cos \varphi.$$

Also:

$$(32) \quad p_a + i p_m = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{is\rho \cos \varphi} \cdot e^{-is\sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

Zur Berechnung des Integrales entwickeln wir zunächst

$$e^{-is\sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}}$$

in eine nach  $\sin^2 \varphi$  fortschreitende Reihe. Dazu benutzen wir die Formel<sup>1)</sup>:

$$(33) \quad (z+h)^{1/2} J_r(\sqrt{z+h}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m \cdot z^{1/2(r-m)}}{2^m \cdot m!} J_{r-m}(\sqrt{z})$$

und erhalten für  $r = \frac{1}{2}$ :

$$(34) \quad (z+h)^{1/4} J_{1/4}(\sqrt{z+h}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m \cdot z^{1/4(1/4-m)}}{2^m \cdot m!} J_{1/4-m}(\sqrt{z}).$$

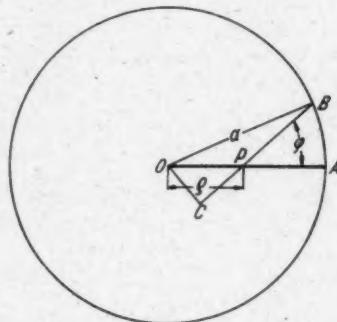


Abb. 1. Zur Berechnung des Schalldruckes bei einem Aufpunktsabstand  $\rho$  kleiner als der Membranradius  $a$

Ferner bekommen wir aus (6) für  $r = -\frac{1}{2}$ :

$$(35) \quad (z+h)^{1/4} J_{-1/4}(\sqrt{z+h}) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{h^m \cdot z^{-1/4(m-3/2)}}{2^m \cdot m!} J_{m-1/4}(\sqrt{z}).$$

Nun ist bekanntlich:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}(z+h)^{1/4} J_{+1/4}(\sqrt{z+h}) = \sin(\sqrt{z+h})$$

und

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}(z+h)^{1/4} J_{-1/4}(\sqrt{z+h}) = \cos(\sqrt{z+h}).$$

Damit folgt, wenn wir  $z$  durch  $z^2 a^2$  und  $h$  durch  $-z^2 \rho^2 \sin^2 \varphi$  ersetzen aus (34) und (35):

1) G. N. Watson, a. a. O., S. 140 (2).

$$\cos(x\sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x^2 \rho^2 \sin^2 \varphi)^m}{2^m \cdot m!} \cdot \frac{(x a)^{1/2}}{(x a)^m} \cdot J_{m-1/2}(x a),$$

$$\sin(x\sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(x^2 \rho^2 \sin^2 \varphi)^m}{2^m \cdot m!} \frac{(x a)^{1/2}}{(x a)^m} \cdot J_{-m+1/2}(x a).$$

Unter Benutzung von (11) und (23) ergibt dann eine kleine Rechnung die Entwicklung:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{-i x \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}} = e^{-i x a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x \rho)^{2m} \cdot \sin^{2m} \varphi}{2^m \cdot m!} \\ \cdot [S_{m-1}(x a) + i C_{m-1}(x a)]. \end{array} \right.$$

Jetzt setzen wir (36) in (32) ein und erhalten durch gliedweise Integration unter Benutzung der bekannten Beziehung:

$$(37) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i x \cos \varphi} \sin^{2m} \varphi d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} J_m(x)$$

unmittelbar für  $p_a + i p_m$  die in (29) abgeleitete Beziehung.

Im Fall  $a < \rho$  benutzen wir nach Schoch den Ansatz:

$$(38) \quad p_a + i p_m = - \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (e^{-i x r_2} - e^{-i x r_1}) d\varphi.$$

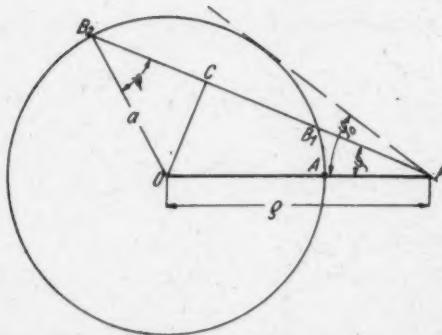


Abb. 2. Zur Berechnung des Schalldruckes bei einem Aufpunktsabstand  $\rho$  größer als der Membranradius  $a$ .

Unter Benutzung der Figur in Abb. 2 erhalten wir zunächst:

$$p_a + i p_m = - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (e^{-i x r_2} - e^{-i x r_1}) d\varphi.$$

Dabei ist:

$$PB_1 = r_1 = \rho \cos \varphi - \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi},$$

$$PB_2 = r_2 = \rho \cos \varphi + \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}.$$

Daher ist:

$$(39) \quad \begin{cases} p_a + i p_m = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi_0} e^{-i x \rho \cos \varphi} \\ \cdot [e^{-i x \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}} - e^{+i x \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}}] d\varphi, \\ p_a + i p_m = +\frac{2i}{\pi} \int_0^{\varphi_0} e^{-i x \rho \cos \varphi} \cdot \sin(x \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}). \end{cases}$$

Führen wir eine neue Integrationsvariable  $\psi$  durch die Beziehung  $a \sin \psi = \rho \sin \varphi$  (vgl. Abb. 2) ein, so tritt an Stelle der oberen Grenze  $\varphi_0$  wegen  $\sin \varphi_0 = \frac{a}{\rho}$  jetzt der Wert  $\frac{\pi}{2}$  und wegen

$$d\psi = \frac{a \cos \psi d\varphi}{\rho \cos \varphi} = \frac{a \cos \psi d\psi}{\sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \psi}}$$

wird aus (39):

$$(40) \quad p_a + i p_m = i x a \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-i x \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \psi}}}{\sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \psi}} \sin(x a \cos \psi) d\psi.$$

Setzen wir nun in (6)  $\nu = +\frac{1}{2}$  und in (33)  $\nu = -\frac{1}{2}$  so folgt:

$$(41) \quad \frac{\sin(Vz+h)}{\sqrt{z+h}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{h^m \cdot z^{-1/2} \binom{1/2+m}{m}}{2^m \cdot m!} J_{1/2+m}(\sqrt{z}),$$

$$(42) \quad \frac{\cos(Vz+h)}{\sqrt{z+h}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m \cdot z^{1/2} \binom{-1/2-m}{m}}{2^m \cdot m!} J_{-1/2-m}(\sqrt{z}).$$

Daraus ergibt sich, ähnlich wie im Fall  $\rho < a$  wenn wir  $h$  durch  $-x^2 a^2 \sin^2 \psi$  und  $z$  durch  $x^2 \rho^2$  ersetzen:

$$(43) \quad \frac{e^{-i x \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \psi}}}{x \sqrt{\rho^2 - a^2 \sin^2 \psi}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x^2 a^2 \sin^2 \psi)^m}{2^m \cdot m! (x \rho)^{m+1}} [C_m(x \rho) - i S_m(x \rho)].$$

Setzen wir (43) in (40) ein, so treten bei gliedweiser Integration Integrale der Form:

$$(44) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} \psi \sin(x \cos \psi) \cos \psi d\psi$$

auf. Diese lassen sich aus der bekannten Beziehung<sup>1)</sup>:

$$(45) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} \psi \cos(x \cos \psi) d\psi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{x^m} J_m(x)$$

ableiten, in dem wir beide Seiten von (45) nach  $x$  differenzieren. So finden wir unter Berücksichtigung von

$$(46) \quad \left( \frac{J_m(x)}{x^m} \right)' = - \frac{J_{m+1}(x)}{x^m}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} \psi \sin(x \cos \psi) \cos \psi d\psi = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1 \frac{J_{m+1}(x)}{x^m}.$$

Damit bekommen wir aus (40), (43) und (46) für  $a < \rho$  die in (28) abgeleitete Formel.

#### 4. Die Berechnung praktischer Beispiele

Für die Berechnung von Beispielen ist die Frage der Konvergenz der in den Formeln (28) und (29) auftretenden Reihen sowie das Vorhandensein geeigneter Tabellen der dabei auftretenden Funktionen von Bedeutung. Für  $a < \rho$  bzw.  $a > \rho$  ist klar, daß die Reihen in (28) bzw. in (29) stets absolut konvergent sind. Und die Konvergenz ist um so besser, d. h. man braucht um so weniger Glieder zu Berechnung, je weiter der Aufpunkt vom Membranrand entfernt ist. Es ist aber auch leicht einzusehen, daß beide Reihen auch für  $\rho = a$  absolut konvergent sind. Um dies zu beweisen, hat man nur nötig, die auftretenden Funktionen  $J_n(x)$ ,  $S_n(x)$  und  $C_n(x)$  durch:

$$|J_n(x)| < \frac{x^n}{2^n \cdot n!}, \quad |S_n(x)| < \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1},$$

$$|C_n(x)| < \text{const} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{x^n}.$$

für hinreichend großes  $n$  abzuschätzen und die Konvergenz der entstehenden Vergleichsreihe festzustellen<sup>2)</sup>. Aber die Konvergenz wird

1) G. N. Watson, a. a. O. S. 24 (1) und 25 (4).

2) Es genügt die Konvergenz für die Reihe:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} |J_{m+1}(x)| |C_m(x)|$$

zu zeigen. Hier ergibt sich die Vergleichsreihe  $\sum b_m$ , mit

$$b_m = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \frac{x^{m+1}}{2^{m+1} \cdot (m+1)!} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{x^m},$$

$$b_m = x \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \right)^2 \cdot \frac{1}{2m+2}.$$

mit wachsendem Argument immer schlechter. Das röhrt daher, daß die Besselsche Funktion  $J_n(x)$  für einen bestimmten Wert  $x$  erst dann mit wachsendem  $n$  monoton gegen Null geht, wenn  $n > x$  geworden ist. Es ist deshalb wichtig, daß für Randpunkte ( $x\rho = za$ ) die Berechnung auf andere Weise erfolgen kann. Und zwar gilt die bekannte Formel<sup>1)</sup>:

$$(47) \quad p_a + i p_m = \frac{1 - J_0(2za)}{2} + \frac{i}{2} H_0(2za).$$

Dabei bedeutet  $H_0(x)$  die Struvesche Funktion nullter Ordnung. Die Funktionen  $S_n(x)$  und  $C_n(x)$ <sup>2)</sup> liegen für  $0 \leq x \leq 10$ , ebenso die Funktionen  $H_n(x)$ <sup>3)</sup> für  $0 \leq x \leq 16$  in Tabellenform vor. Ferner benutzen wir noch die früher berechneten Funktionen  $S_n(20)$ ,  $C_n(20)$ ,  $S_n(40)$  und  $C_n(40)$  für  $n$  von 0 bis 30 bzw.  $n$  von 0 bis 50<sup>4)</sup>. Im übrigen lassen sich diese auch für größeres Argument aus den bekannten Rekursionsformeln

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} S_n(x) - S_{n-1}(x), \quad S_0(x) = \sin x, \\ \qquad \qquad \qquad S_1(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x, \\ C_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} C_n(x) - C_{n-1}(x), \quad C_0(x) = \cos x, \\ \qquad \qquad \qquad C_1(x) = \sin x + \frac{\cos x}{x} \end{array} \right.$$

leicht berechnen, wenn man genaue Tafeln für  $\sin x$  und  $\cos x$  hat<sup>5)</sup>. Schließlich konnten wir noch  $S_n(x)$  und  $C_n(x)$  für  $10 \leq x \leq 20$  aus den Tabellen für  $J_{n+1/2}(x)$  und  $J_{-n-1/2}(x)$ <sup>6)</sup> und die  $J_n(x)$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$  bei ganzzahligem Argument aus vorhandenen Tafeln<sup>7)</sup> entnehmen.

Dann ist wegen

$$\frac{b_{m+1}}{b_m} = \frac{m^2 + m + \frac{1}{4}}{m^2 + 3m + 2}$$

die Reihe  $\sum b_m$  nach einem bekannten Kriterium konvergent. (Vgl. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, S. 280).

- 1) Mc Lachlan, a. a. O., S. 1017.
- 2) Rep. Brit. Assoc. adv. Sci. 1914, S. 87—102; 1916, S. 97—107; 1922, S. 263—270.
- 3) G. N. Watson, Theory of Bessel Functions S. 666—696.
- 4) Elect. Nachr. Tech. 15, S. 73. 1938.
- 5) K. Hayashi, Fünfstellige Funktionstafeln S. 46; Tafeln der Besselschen ... Funktionen S. 30—47.
- 6) Rep. Brit. Assoc. adv. Sci. 1925, S. 222—233.
- 7) E. Jahnke u. F. Emde, Funktionstafeln 1933, S. 242—245.

Tabelle 1

 $x\varrho = 4$  $x\varrho = 8$ 

m	I	II	I $\times$ II	III	I $\times$ III
	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \cdot [S_{m-1}(10) + iC_{m-1}(10)]$	$\left(\frac{4}{10}\right)^m \cdot J_m(4)$		$\left(\frac{8}{10}\right)^m \cdot J_m(8)$	
1	-0,2720 -0,4195i	-0,0264	+0,0072 +0,0111i	+0,1877	-0,0511 -0,0787i
2	+0,2943 -0,2355i	+0,0583	+0,0172 -0,0137i	-0,0723	-0,0213 +0,0170i
3	+0,2436 +0,2033i	+0,0275	+0,0067 +0,0056i	-0,1490	-0,0363 -0,0303i
4	-0,1080 +0,2607i	+0,0072	-0,0008 +0,0019i	-0,0432	+0,0047 -0,0113i
5	-0,2598 +0,0041i	+0,0014	-0,0003	+0,0609	-0,0158 +0,0002i
6	-0,1253 -0,2117i			+0,0885	-0,0111 -0,0187i
7	+0,0932 -0,2197i	$e^{-i10} J_0(4) =$	+0,0300 +0,0049i	+0,0672	+0,0063 -0,0448i
8	+0,2227 -0,0835i	$e^{-i10} J_0(8) =$	+0,3332 -0,2160i	+0,0375	+0,0084 -0,0031i
9	+0,2329 +0,0763i	$\mathfrak{S} =$	+0,3632 -0,2111i	+0,0189	+0,0039 +0,0013i
10	+0,1764 +0,1981i	$p_4 = 1 - \mathfrak{S} =$	+0,6368 +0,2111i	+0,0065	+0,0011 +0,0013i
11	+0,1086 +0,2899i			+0,0022	+0,0002 +0,0006i
12	+0,0574 +0,4026i			+0,0007	+0,0003i
					-0,1204 -0,1362
					$e^{-i10} J_0(8) =$ -0,1441 +0,0034i
					$\mathfrak{S} =$ -0,2645 -0,0428i
					$p_8 = 1 - \mathfrak{S} =$ +1,2645 +0,0428i

Tabelle 2

 $x\varrho = 12$  $x\varrho = 16$ 

m	I	II	I $\times$ II	III	I $\times$ III
	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \cdot [S_m(10) + iC_m(10)]$	$\left(\frac{10}{12}\right)^{m+1}$		$\left(\frac{10}{16}\right)^{m+1} \cdot [S_m(10) + iC_m(10)]$	
0	+0,0435	-0,4471 +0,7032i	-0,0194 +0,0306i	-0,1799 -0,5986i	-0,0078 -0,0260i
1	+0,1273	-0,6171 -0,3238i	-0,0786 -0,0412i	+0,3671 -0,1359i	+0,0467 -0,0173i
2	+0,0219	+0,1820 -0,5558i	+0,0398 -0,0122i	+0,1133 +0,2179i	+0,0025 +0,0048i
3	-0,0686	+0,4915 +0,0319i	-0,0337 -0,0022i	-0,1213 +0,0956i	+0,0083 -0,0066i
4	-0,0640	+0,1127 +0,4015i	-0,0072 -0,0257i	-0,0774 -0,0590i	+0,0050 +0,0038i
5	-0,0036	-0,2710 +0,2288i	+0,0010 -0,0008i	+0,0202 -0,0581i	-0,0001 +0,0002i
6	+0,0489	-0,2853 -0,1040i	-0,0140 -0,0051i	+0,0389 -0,0019i	+0,0019 -0,0001i
7	+0,0686	-0,0693 -0,2528i	-0,0046 -0,0168i	+0,0119 +0,0217i	+0,0008 +0,0014i
8	+0,0573	+0,1259 -0,1911i	+0,0072 -0,0110i	-0,0082 +0,0135i	-0,0005 +0,0006i
9	+0,0385	+6,1968 -0,0500i	+0,0076 -0,0019i	-0,0101 +0,0005i	-0,0001
10	+0,0217	+0,1722 +0,0667i	+0,0037 +0,0014i		$p_{16} =$ +0,0568 -0,0393i
11	+0,0107	+0,1145 +0,1320i	+0,0012 +0,0014i		
12	+0,0047	+0,0633 +0,1845i	+0,0003 +0,0007i		
13	+0,0019	+0,0803 +0,1939i	+0,0001 +0,0004i		
14	+0,0007	0,0129 +0,3788i		+0,0002i	
15	+0,0002		$p_{18} =$ -0,0965 -0,0822i		

Um den Gang der Rechnung zu erläutern, wurde der Fall  $x\alpha = 10$  für die durch  $x\varrho = 4, 8, 12, 16$  gegebenen Aufpunkte ausführlich in den Tabellen 1 und 2 dargestellt. Das Gesamtergebnis ist in der

Tabelle 3

$x \cdot \rho$	$x \cdot a = 10$ $p_a + i p_m$	$x \cdot a = 20$ $p_a + i p_m$	$x \cdot a = 40$ $p_a + i p_m$	$x \cdot a = 60$ $p_a + i p_m$
0	+1,839 -0,544i	+0,592 +0,913i	+1,667 +0,745i	+1,952 -0,305i
1	+1,652 -0,396i	+0,687 +0,694i	+1,506 +0,574i	+1,730 -0,230i
2	+1,213 -0,072i	+0,883 +0,191i	+1,138 +0,176i	+1,216 -0,059i
3	+0,795 +0,194i	+1,085 -0,252i	+0,816 -0,186i	+0,755 +0,088i
4	+0,637 +0,211i	+1,171 -0,365i	+0,737 -0,299i	+0,621 +0,119i
5	+0,703 +0,016i	+1,112 -0,146i	+0,887 -0,146i	+0,835 +0,067i
6	+1,145 -0,186i	+0,974 +0,163i	+1,117 +0,100i	+1,140 -0,051i
7	+1,319 -0,185i	+0,870 +0,287i	+1,203 +0,226i	+1,284 -0,092i
8	+1,265 +0,043i	+0,879 +0,141i	+1,098 +0,145i	+1,169 -0,038i
9		+0,986 -0,059i	+0,917 -0,051i	+0,919 +0,046i
10	+0,417 +0,048i	+1,104 -0,254i	+0,828 -0,184i	+0,764 +0,080i
11		+1,131 -0,157i	+0,902 -0,148i	+0,835 +0,037i
12	+0,096 -0,082i	+1,051 +0,095i	+1,060 +0,014i	+1,038 -0,037i
13	-0,104 +0,057i	+0,921 +0,241i	+1,153 +0,154i	+1,193 -0,072i
14	+0,002 +0,093i	+0,839 +0,160i	+1,110 +0,150i	+1,166 -0,036i
15	+0,072 +0,935i	+0,905 -0,085i	+0,957 +0,037i	+0,995 +0,030i
16	+0,056 -0,037i	+1,068 -0,250i	+0,861 -0,127i	+0,837 +0,067i
17	-0,001 -0,053i	+1,206 -0,183i	+0,897 -0,152i	+0,829 +0,039i
18	-0,041 -0,018i	+1,167 +0,117i	+1,028 -0,042i	+0,978 -0,025i
19	-0,039 +0,026i		+1,130 +0,102i	+1,140 -0,064i
20	+0,003 +0,036i	+0,496 +0,071i	+1,108 +0,152i	+1,170 -0,041i

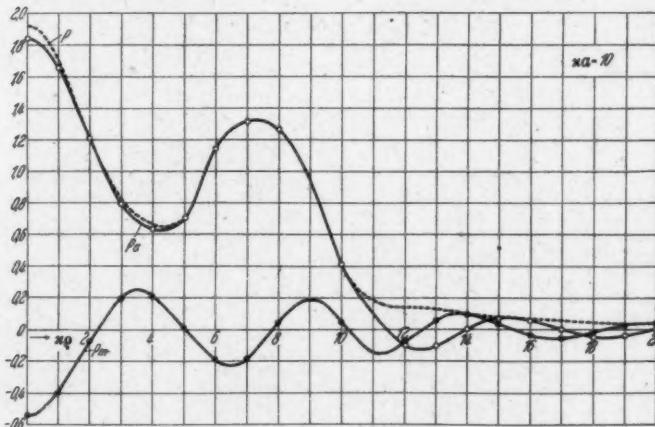


Abb. 3. Der relative Schalldruck  $p$  und seine Komponenten  $p_a$ ,  $p_m$   
für  $x \cdot a = 10$  ( $a$  = Membranradius,  $x = \frac{2\pi}{\lambda}$ )

Tab. 3 zusammengestellt und in den entsprechenden Kurven (Abb. 3—6) gezeichnet. Dabei wurde außer den Komponenten  $p_a$  und  $p_m$  noch die resultierende Druckamplitude  $p = \sqrt{p_a^2 + p_m^2}$  gestrichelt eingezeichnet.

5. Die Ableitung einer früher angegebenen Beziehung  
aus der Integraldarstellung nach King

Zum Schluß soll noch gezeigt werden, daß auch eine früher vom Verf. angegebene, für beliebige Aufpunkte gültige Formel für  $p_a$  unmittelbar aus dem Kingschen Integral abgeleitet werden kann. Führen

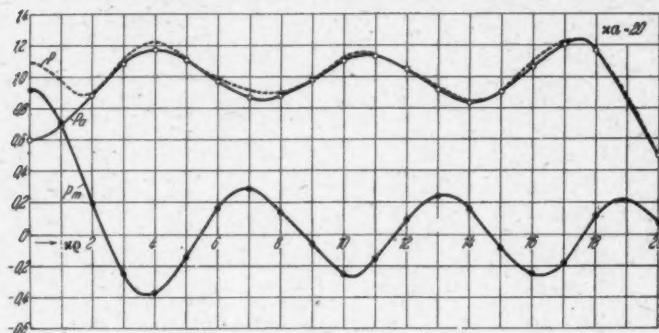


Abb. 4. Der relative Schalldruck  $p$  und seine Komponenten  $p_a$ ,  $p_m$  für  $x/a = 20$

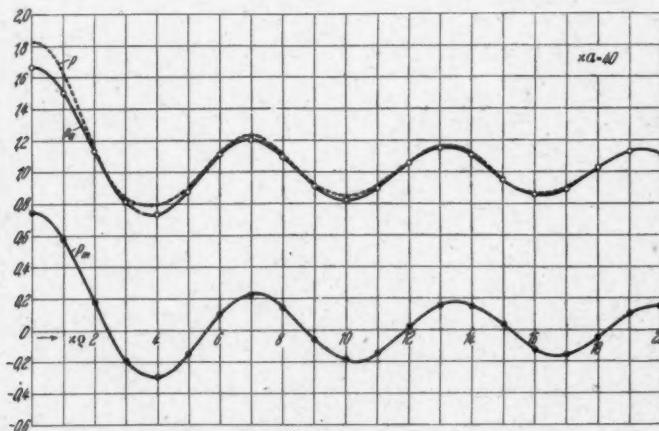


Abb. 5. Der relative Schalldruck  $p$  und seine Komponenten  $p_a$ ,  $p_m$  für  $x/a = 40$

wir an Stelle der Zylinderkoordinaten  $\rho$ ,  $z$  die Koordinaten des Aufpunktes ein ( $r$  = Abstand des Aufpunktes vom Anfangspunkt,  $\gamma$  = Winkel, den die Aufpunktsgerade mit der  $z$ -Achse bildet) so ist  $\rho = r \sin \gamma$ ,  $z = r \cos \gamma$  und wir haben in (5) wegen (1) den reellen Teil von

$$e^{-iz\sqrt{x^2 - 1^2}} = e^{-iz \cos \theta}, \quad \text{d. h. } \cos(xr \cos \gamma \cos \theta)$$

einzu führen. Dann ist:

$$(49) \quad p_a = x a \int_0^{\pi/2} \cos(xr \cos \gamma \cos \vartheta) J_0(xr \sin \gamma \sin \vartheta) J_1(a \sin \vartheta) d\vartheta.$$

Wir benutzen die folgende Entwicklung von  $J_1(xa \sin \vartheta)$  nach Kugelfunktionen<sup>1)</sup>:

$$(50) \quad \left| \begin{array}{l} x \cdot a J_1(xa \sin \vartheta) \\ = \sin \vartheta \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4n+1) P_{2n}(0) P_{2n}(\cos \vartheta) \int_0^{xa} S_{2n}(x) dx. \end{array} \right.$$

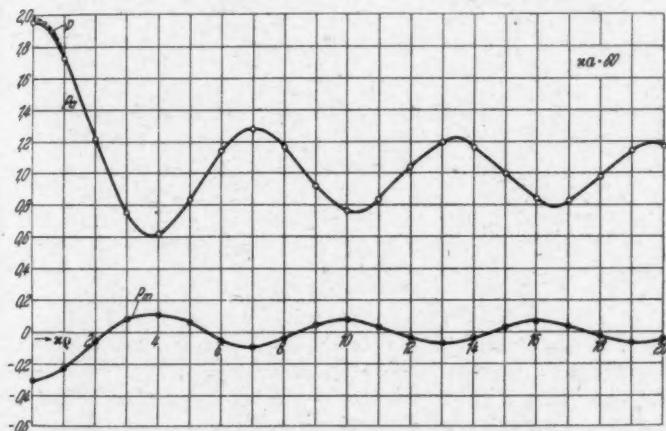


Abb. 6. Der relative Schalldruck  $p$  und seine Komponenten  $p_a$ ,  $p_m$  für  $xa = 60$   
Setzen wir dies in (49) ein, so erhalten wir Integrale der Form:

$$(51) \quad \left| \begin{array}{l} \int_0^{\pi/2} f(\vartheta) d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \cos(xr \cos \gamma \cos \vartheta) \\ \cdot J_0(xr \sin \gamma \sin \vartheta) P_{2n}(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \end{array} \right.$$

Nun ist aber wegen:

$$f\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right),$$

$$\int_0^{\pi} f(\vartheta) d\vartheta = 2 \int_0^{\pi/2} f(\vartheta) d\vartheta$$

1) N. Nielsen, Handb. der Zylinderfunktionen, Leipzig 1904, S. 278 (3).  
Dabei ist  $\nu = 1/2$  gesetzt und nach Multiplikation mit  $x$  von 0 bis  $xa$  integriert.

und wir können (51) aus der Beziehung ableiten<sup>1)</sup>:

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\pi} \cos(z \cos \vartheta \cos \psi) J_{\nu-1/2}(z \sin \vartheta \sin \psi) C_{\nu}^{\nu}(\cos \vartheta) \sin^{\nu+1/2} \vartheta d\vartheta \\ = (-1)^{\nu/2} \sin^{\nu-1/2} \psi C_{\nu}^{\nu}(\cos \psi) J_{\nu+r}(z). \end{array} \right.$$

Setzen wir

$$z = \kappa r, \quad \psi = \gamma, \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad r = 2n, \quad C_{2n}^{1/2}(\cos \vartheta) = P_{2n}(\cos \vartheta),$$

so folgt unter Berücksichtigung von (11)

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\pi/2} \cos(\kappa r \cos \gamma \cos \vartheta) J_0(\kappa r \sin \gamma \sin \vartheta) P_{2n}(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \\ = \frac{(-1)^n}{\kappa r} \cdot P_{2n}(\cos \gamma) S_{2n}(\kappa r) \end{array} \right.$$

und damit folgt aus (49) und (50) das früher<sup>2)</sup> angegebene Resultat:

$$(54) \quad p_a = \frac{1}{\kappa r} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) P_{2n}(\cos \gamma) S_{2n}(\kappa r) \int_0^{\kappa a} S_{2n}(x) dx.$$

Das entsprechende, früher angegebene, Resultat für  $p_m$  scheint sich nicht unmittelbar aus dem Kingschen Integral ableiten zu lassen.

#### Zusammenfassung

Im Anschluß an einen von King und von Schoch gegebenen Ansatz werden Formeln für den Schalldruck der kreisförmigen Kolbenmembran abgeleitet, wenn der Aufpunkt in der Membranebene liegt. Im Gegensatz zu den bisher vorliegenden Ergebnissen erweisen sich die abgeleiteten Formeln für die praktische Berechnung bei größerem Membranradius besonders zweckmäßig. Zur Erläuterung werden praktische Beispiele für  $\kappa a = 10, 20, 40$  und  $60$  ( $a$  = Membranradius,  $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ ) berechnet und die Ergebnisse graphisch dargestellt.

1) G. N. Watson, a. a. O., S. 379 (2).

2) Electr. Nachr. Techn. 12. S. 20. 1935.

Kiel, Lornsenstr. 34.

(Eingegangen 29. Januar 1942)

**Verzerrungen, die durch die endliche Durchlaßbreite physikalischer Apparate hervorgerufen werden, nebst Anwendung auf die Periodenforschung**

**Von W. Meyer-Eppler**

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut Bonn)

(Mit 13 Abbildungen)

Oft wird ein physikalischer Vorgang dadurch der Messung zugänglich gemacht, daß man seinen Mittelwert über ein gewisses räumliches oder zeitliches Intervall ermittelt. So muß beispielsweise bei allen *spektralen Intensitätsmessungen* (Spektralapparate, akustische und elektrische Filter) zur Erzielung einer meßbaren Intensität ein *endlicher* Spektralbereich vorhanden sein; *monochromatische Messungen* sind nicht möglich, und deshalb ist das gemessene Spektrum immer „unrein“<sup>1)</sup>. Bei *photographischen und stroboskopischen Messungen* zeitlich veränderlicher Vorgänge ist zur Erzielung eines ausreichenden Bildeindrucks ein *endliches* Zeitintervall erforderlich; eine „Bewegungsunschärfe“ ist die Folge<sup>2)</sup>. Bei der Aufnahme und Wiedergabe von *Tonfilmen* werden Abtastspalte von endlicher Breite verwendet; das zu übertragende Tonfrequenzspektrum wird dadurch nach oben hin in gewisser Weise begrenzt<sup>3)</sup>. Bei optischen *Abbildungen* und bei *Projektionen* tritt aus verschiedenen Gründen (Bildfehler, Beugung, endliche Ausdehnung der Lichtquelle) eine „Verunstaltung“<sup>4)</sup> des Bildes ein, die sich wie eine allseitige Bewegungsunschärfe auswirkt.

Alle vorstehend aufgeführten Fälle lassen sich nach gemeinsamen Grundsätzen behandeln. Wir benötigen dazu einige Hilfsmittel der Funktionalanalysis, insbesondere der Fouriertransfor-

1) W. Meyer-Eppler, Ztschr. f. Instrumentenkd. 60. S. 197. 1940.

2) M. Nagel, Ermittlung und Kompensation der Bildpunktwanderung insbesondere bei Luftbildaufnahmen, Diss. T.-H. Dresden 1939.

3) W. Vox, Der Spalt- und Filmfrequenzgang bei der Tonfilmaufnahme und -wiedergabe. Diss. T.-H. Berlin 1938 (auch Akust. Ztschr. 3. S. 302. 1938).

4) J. Flügge, Ztschr. f. Instrumentenkd. 46. S. 333 und 389. 1926.

mation<sup>1)</sup>. Mit ihrer Hilfe werden wir uns einen Überblick über die mannigfachen bei der Verwischung von Energieverteilungen auftretenden Erscheinungen verschaffen.

### I. Theorie der Verwischung von Energieverteilungen

Gegeben sei eine (räumliche oder zeitliche) Energieverteilung  $J(x)$ , wobei unter  $x$  die räumliche oder zeitliche Koordinate verstanden sein soll. Wir wollen diese ursprünglich vorhandene Verteilung die *Originalfunktion* nennen. Nach irgendeiner Vorschrift sollen nun aus der Originalfunktion Mittelwerte gebildet und jeweils einem bestimmten Argument zugeordnet werden. Die auf diese Weise entstehende geglättete Energieverteilung  $E(x)$  ist ein mehr oder weniger verzerrtes Abbild der Originalfunktion; wir nennen deshalb  $E(x)$  die *Bildfunktion*. Die Gewichtsfunktion  $A(z)$ , nach der die Mittelung vorgenommen wird, soll bei den folgenden Betrachtungen immer die Eigenschaften einer physikalischen „Apparatefunktion“ haben, d. h. sie soll zunächst nur positiver Werte fähig und zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  eigentlich integrierbar sein. Über Stetigkeit und Differenzierbarkeit werden keine Voraussetzungen gemacht, doch soll die Funktion mindestens stückweise glatt sein.

Zwischen  $J(x)$  und  $E(x)$  besteht nun ein Zusammenhang in Form einer Integralgleichung:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) J(\xi - x) d\xi.$$

Die Grenzen  $-\infty$  und  $+\infty$  haben nur formale Bedeutung, da oberhalb einer gewissen Schranke die praktisch vorkommenden Apparatefunktionen beliebig kleine Werte annehmen. Die vorstehende Gleichung stellt ein sogenanntes Komposition- oder Faltungsprodukt der Funktionen  $A$  und  $J$  dar; man hat dafür die praktische Schreibweise

$$E(x) = A(x) * J(x)$$

eingeführt, die im folgenden beibehalten werden soll.

Am häufigsten wurde bisher in der Literatur der Fall behandelt, daß die Mittelwertbildung ungewichtet erfolgt, die Apparatefunktion also die Form

$$A(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } |z| < \frac{s}{2} \\ 0 & \text{für } |z| > \frac{s}{2} \end{cases}$$

1) S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Leipzig 1932;  
N. Wiener, Acta Mathem. 55. S. 117. 1930.

hat,  
mit  
funk

lässt  
einf

gäng  
gela  
verg  
mer

Kem  
auf  
der  
in  
Lag  
Fun  
Ver  
eine  
wob  
such  
gab  
freq  
Betr  
bere  
Fou  
lich

Die  
und

Zts  
P. E  
G. I  
T. M  
Jour

hat; dabei ist  $s$  die „Durchlaßbreite“ der Apparatefunktion. Die mit dieser Rechteckfunktion gebildete Gleichung für die Bildfunktion

$$E(x) = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} J(\xi - x) d\xi$$

läßt sich als Differenzengleichung schreiben und kann verhältnismäßig einfach behandelt werden<sup>1)</sup>.

Wichtig ist auch das Problem, aus der allein der Messung zugänglichen Bildfunktion zu Aussagen über die Originalfunktion zu gelangen<sup>2)</sup>. Bei Berücksichtigung des grundsätzlich begrenzten Konvergenzbereichs derartiger Reduktionsverfahren lassen sich durchaus merkliche Verbesserungen an der gemessenen Verteilung erzielen.

Zur Beurteilung der Grenzen ist aber zunächst einmal die Kenntnis der Wirkung einer vorgegebenen Apparatefunktion  $A(z)$  auf vergleichsweise einfache Originalfunktionen erforderlich. Je nach der Art des vorliegenden Problems wird man die Originalfunktion in eine Potenzreihe, nach Kugelfunktionen, Hermiteschen oder Laguerreschen Polynomen oder schließlich nach periodischen Funktionen zu entwickeln suchen. Besonders aufschlußreich für das Verhalten einer gegebenen Apparatefunktion ist ihre Wirkung auf eine periodische Funktion der Form  $\cos \alpha x + i \sin \alpha x = e^{i \alpha x}$ , wobei  $\alpha$  ein Parameter ist, der die „Frequenz“ der zur Untersuchung benutzten „Versuchswelle“ angibt; bei der Tonfilmwiedergabe beispielsweise ist  $\alpha$  der auf dem Film aufgezeichneten Tonfrequenz bei konstanter Filmvorschubgeschwindigkeit proportional. Betrachtet man  $\alpha$  als Veränderliche in einem neuen Funktionsbereich, dann erhält man aus der Apparatefunktion  $A(z)$  durch die Fouriertransformation eine gleichwertige Darstellung in der Veränderlichen  $\alpha$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) e^{i \alpha (\xi - x)} d\xi = F(i \alpha) \cdot e^{-i \alpha x}.$$

Die Funktion  $F(i \alpha)$  ist die Fouriertransformierte der Funktion  $A(z)$  und stellt im wesentlichen das Spektrum dieser Funktion dar; um

1) W. Meyer-Eppler, a. a. O.

2) E. P. Hyde, Astrophys. Journ. 35. S. 237. 1912; P. H. van Cittert, Ztschr. f. Phys. 65. S. 547. 1930; 69. S. 298. 1931; H. C. Burger u. P. H. van Cittert, Ztschr. f. Phys. 79. S. 722. 1932; 81. S. 428. 1933; G. Doetsch, Ztschr. f. Phys. 48. S. 705. 1928; Math. Ztschr. 41. S. 283. 1936. T. Murakami, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (3) 23. S. 227. 1941; S. Sabaroff, Journ. Soc. Mot. Pict. Engr. 36. S. 497. 1941.

uns weiterhin kurz ausdrücken zu können, werden wir im folgenden stets vom Spektrum einer Apparatefunktion sprechen und damit die obige Transformation meinen. Mit den in der Funktionalanalysis üblichen Bezeichnungen schreiben wir kurz

$$F(i\alpha) = \mathfrak{F}\{A(z)\} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi.$$

In sehr vielen Fällen ist  $A(z)$  eine gerade, zu  $z = 0$  symmetrische Funktion. Dann vereinfacht sich  $F$  zu einer reellen Funktion, die durch die Fouriersche Cosinustransformation

$$C(\alpha) = \mathfrak{C}\{A(z)\} \equiv 2 \int_0^{\infty} A(\xi) \cos \alpha \xi d\xi$$

definiert ist. Sinngemäß bezeichnet man die Transformation

$$S(\alpha) = \mathfrak{S}\{A(z)\} \equiv 2 \int_0^{\infty} A(\xi) \sin \alpha \xi d\xi$$

mit Sinustransformation. Es ist

$$F(i\alpha) = C(\alpha) + i S(\alpha).$$

Das Auftreten der komplexen Spektralfunktion  $F(i\alpha)$  bei nicht symmetrischen Apparatefunktionen bedeutet, daß die gemessenen Bildfunktionen gegenüber den Originalfunktionen nicht nur eine veränderte Amplitude, sondern auch eine Phasenverschiebung aufweisen, die dazu noch für verschiedene Frequenzen verschieden groß sein kann. Wenn die Phasenverhältnisse keine Rolle spielen, wie etwa beim Tonfilm, dann genügt die Betrachtung des reellen Spektrums

$$F(\alpha) = + \sqrt{F(i\alpha)F^*(i\alpha)},$$

wo mit  $F^*$  die zu  $F$  konjugiert-komplexe Funktion gemeint ist.

#### a) Symmetrische Apparatefunktionen

In Tab. 1 sind einige symmetrische Apparatefunktionen mit den zugehörigen Spektren dargestellt; dabei sind die Apparatefunktionen so gezeichnet, wie sie etwa als Diaphragmen (Tonfilmspalte und ähnliche) Verwendung finden würden<sup>1)</sup>. Bemerkenswert ist, daß es Spektren gibt, die Nullstellen und sogar Extrema mit einer Phasenverschiebung von  $180^\circ$  aufweisen, so vor allem die „Spaltfunktion“ der Tonfilmtheorie, das Spektrum des Rechteckspaltes (Tab. 1, 1). Die Nullstellen bewirken, daß eine etwa mit dieser Frequenz vorhandene

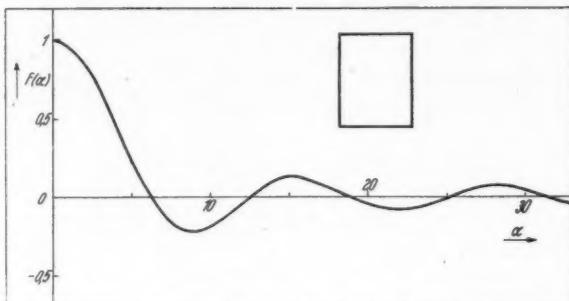
1) W. Vox, a. a. O.; H. Lichte u. A. Narath, Physik u. Technik des Tonfilms, Leipzig 1941, S. 78, 121 ff.

Tabelle 1

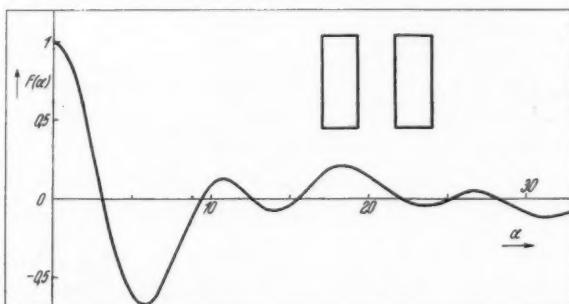
Spektren  $F(\alpha)$  symmetrischer Apparatefunktionen  $A(z)$ 

$$\text{Normierung: } \int_{-\infty}^{+\infty} A(z) dz = q.$$

Die Apparatefunktionen sind in Form von Diaphragmen gezeichnet



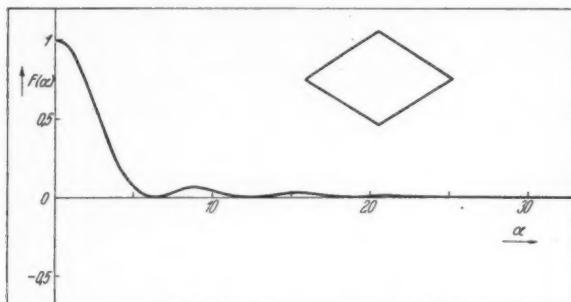
$$1. \quad A(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } |z| < \frac{q}{2}, \\ 0 & \text{für } z > \frac{q}{2}, \end{cases} \quad F(\alpha) = q \frac{\sin\left(\frac{q\alpha}{2}\right)}{\frac{q\alpha}{2}}$$



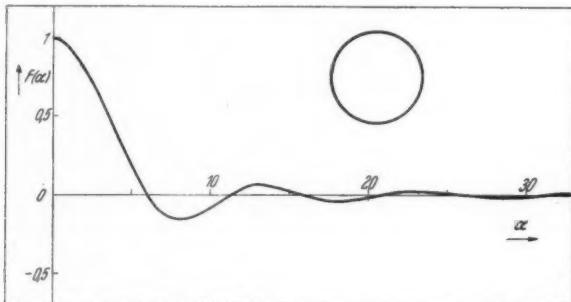
$$2. \quad A(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{q}{4} < |z| < \frac{3q}{4}, \\ 0 & \text{für alle übrigen } z, \end{cases} \quad F(\alpha) = q \frac{\sin\left(\frac{q\alpha}{4}\right) \cos\left(\frac{q\alpha}{2}\right)}{\frac{q\alpha}{4}}$$

Periodizität in der Bildfunktion überhaupt nicht in Erscheinung tritt; das Auflösungsvermögen der in den Spektren Nullstellen aufweisenden Funktionen ist also stark selektiv. In Anlehnung an die Theorie der elektrischen Filter wollen wir im folgenden vom *Durchlaß-* bzw. *Sperrbereich* einer Apparatefunktion sprechen.

Tabelle 1 (Fortsetzung)



$$3. \quad A(z) = \begin{cases} 1 - \frac{|z|}{q} & \text{für } |z| < q, \\ 0 & \text{für } |z| > q, \end{cases} \quad F(\alpha) = q \left[ \frac{\sin \left( \frac{q\alpha}{2} \right)^2}{\frac{q\alpha}{2}} \right]$$

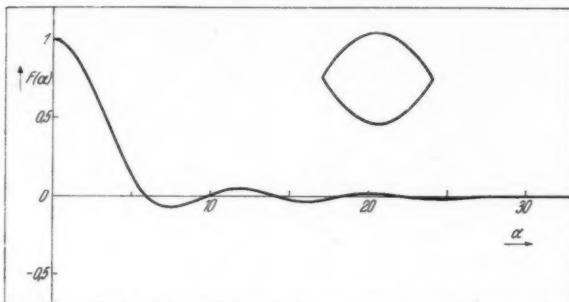


$$4. \quad A(z) = \begin{cases} \sqrt{1 - \left( \frac{\pi z}{2q} \right)^2} & \text{für } |z| < \frac{\pi q}{2}, \\ 0 & \text{für } |z| > \frac{\pi q}{2}, \end{cases} \quad F(\alpha) = q \frac{J_1 \left( \frac{2q\alpha}{\pi} \right)}{\frac{q\alpha}{\pi}}$$

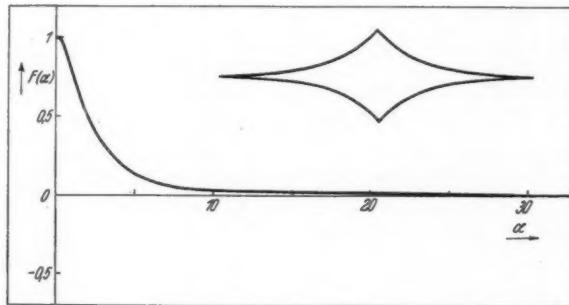
Überall dort, wo in der Praxis rechteckige (runde, dreieckige, rhombische usw.) „Blenden“ (in allgemeinstem Bedeutung) verwendet werden, ist mit erheblichen Irrtümern zu rechnen, wenn die Blendenbreite die Breite der auszumessenden Struktur übertrifft. So wird beispielsweise schon eine so elementare Größe wie die *Anzahl* der Komponenten einer Struktur unter Umständen völlig verkehrt wiedergegeben, ganz abgesehen von der möglichen Vertauschung von Maximum- und Minimumstellen. Betrug die Zahl der Komponenten

in d  
funk  
der  
der  
der  
an  
wird  
bei

Tabelle 1 (Fortsetzung)



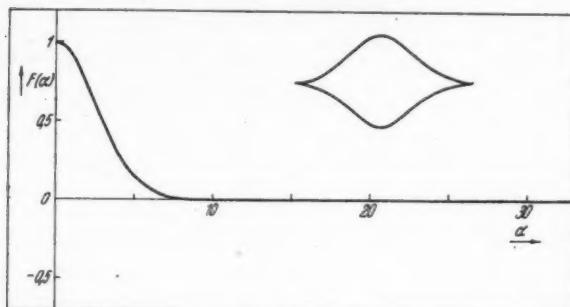
$$5. \quad A(z) = \begin{cases} \cos \frac{2z}{q} & \text{für } |z| < \frac{\pi q}{4}, \\ 0 & \text{für } |z| > \frac{\pi q}{4}, \end{cases} \quad F(\alpha) = q \frac{\cos \left( \frac{q \alpha \pi}{4} \right)}{1 - \left( \frac{q \alpha}{2} \right)^2}$$



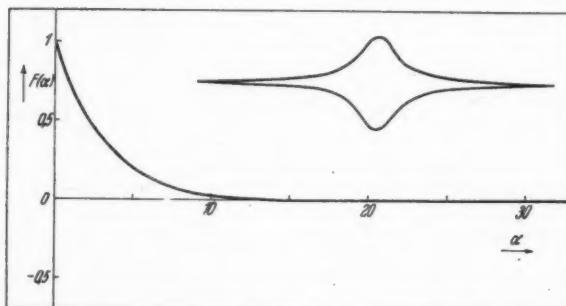
$$6. \quad A(z) = e^{-\frac{2|z|}{q}}, \quad F(\alpha) = q \frac{1}{1 + \left( \frac{q \alpha}{2} \right)^2}$$

in der Originalfunktion  $n$ , dann bewirkt eine Breite  $q$  der Apparatefunktion (etwa Spaltbreite des Spektralapparates), die größer ist als der Abstand  $h$  der — als äquidistant angenommenen — Komponenten der Struktur, eine Verminderung der Zahl dieser Komponenten in der Bildfunktion auf  $n - 1$ ; die neuen Maxima liegen dabei genau an der Stelle der ursprünglichen Minima. Ist  $h < q < 2h$ , dann wird die Zahl der meßbaren Komponenten auf  $n - 2$  herabgesetzt, bei  $2h < q < 3h$  auf  $n - 3$  usw. In gleichem Maße nimmt jedoch

Tabelle 1 (Fortsetzung)



$$7. \quad A(z) = e^{-\frac{\pi z^2}{q^2}}, \quad F(z) = q \cdot e^{-\frac{(q z)^2}{4\pi}}$$



$$8. \quad A(z) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi z}{q}\right)^2}, \quad F(z) = q \cdot e^{-\frac{q z}{\pi}}$$

auch der Kontrast der Komponenten gegen den immer stärker hervortretenden kontinuierlichen Untergrund ab.

Wie aus Tab. 1 ersichtlich ist, gibt es auch Apparatefunktionen ohne Sperrbereich. Wenn es gelingt, einen bisher mit rechteckiger oder ähnlicher Apparatefunktion behafteten physikalischen Apparat mit einer derartigen sperrbereichfreien Apparatefunktion zu versehen, dann fallen zumindest die größten Täuschungen weg. Abb. 1 (S. 277) zeigt die experimentelle Bestätigung dieses Sachverhalts. In eine un durchsichtige runde Scheibe wurden vier radiale Schlitzte in gleichem

V  
4  
11  
9  
4  
2

XUM

Winkelabstand voneinander geschnitten; die in Rotation versetzte Scheibe wurde im Rhythmus der Rotationsfrequenz stroboskopisch beleuchtet, so daß ein stillstehendes Bild der Schlitze erhalten wurde. Ob dieses Bild aber die wahre Zahl und Struktur der in die Scheibe geschnittenen Schlitze wiedergibt, hängt davon ab, in welcher Weise die Helligkeitszu- und -abnahme der stroboskopischen Beleuchtung erfolgt. Wie die Aufnahme *a* zeigt, wird bei Aussendung „rechteckiger“ Lichtblitze (d. h. Lichtblitze mit rechteckiger Intensitätsänderung) passender Länge eine Zahl von 3 Schlitten vorgetäuscht; läßt man jedoch die Lichtblitze exponentiell zunehmen und wieder abklingen, dann zeigt das in einer dicht hinter der Scheibe liegenden Ebene aufgefangene Bild *b* die richtige Zahl von 4 Schlitten. Das Zeitintegral über einen einzelnen Lichtblitz war in beiden Fällen gleich, ebenfalls die Belichtungszeit. Zur Vermeidung von groben Täuschungen ist es deshalb zweckmäßig, bei stroboskopischen Untersuchungen keine rechteckigen Lichtimpulse zu verwenden. Von E. Cauda<sup>1)</sup> wurde deshalb beispielsweise vorgeschlagen, an Stelle des üblichen Tonfilmspaltes einen einseitigen Exponentenspalt zu verwenden.

Durch physiologische Effekte (Kontrastwirkung) wird die Strukturfälschung beim Vorliegen rechteckiger und ähnlicher Apparatefunktionen noch vergrößert, wodurch unter Umständen eine große Schärfe der einzelnen Details vorgetäuscht werden kann. Vorsicht in der Beurteilung derartiger Details ist deshalb stets angebracht. Bei vielen technischen Anordnungen wird jedoch durch zusätzliche, an sich vielleicht unerwünschte Effekte eine ursprünglich vorhandene rechteckige Apparatefunktion zu einem mehr oder weniger glockenförmigen Verlauf verzerrt, so daß die auftretenden Fehler stark vermindert werden [Beispiel: Lichtstreuung und Diffusion bei Tonfilmen<sup>2)</sup>, Beugung bei Spektralapparaten]. Bei anderen Geräten dagegen dürfte die Berücksichtigung dieser Fehlerquelle erforderlich sein. Eine glockenförmige Apparatefunktion ist auch schon deswegen anzustreben, weil bei ihr die Reduktion auf die Originalfunktion wenig Schwierigkeiten macht. [Wenn die Apparatefunktion die Form  $e^{-x^2}$  besitzt, dann kann man aus allen auf physikalische Weise entstandenen Bildfunktionen mit Hilfe der inversen Gaußtransformation die Originalfunktion berechnen<sup>3)</sup>].

1) E. Cauda, Kinotechnik 12, S. 445. 1930; vgl. auch: H. Frieser, IX<sup>o</sup> Congrès International de Photographie, Paris 1935, S. 207.

2) W. Vox, a. a. O.

3) G. Doetsch, a. a. O.

## b) Unsymmetrische Apparatefunktionen

Die komplexen Spektren unsymmetrischer Apparatefunktionen werden am besten in Form von *Ortskurven*<sup>1)</sup> dargestellt; schreibt man nämlich  $F(i\alpha)$  in der Form

$$F(i\alpha) = r(\alpha) \cdot e^{i\varphi(\alpha)},$$

dann kann man  $\alpha$  als Parameter betrachten und den Radiusvektor  $r$  als Funktion des Phasenwinkels  $\varphi$  auftragen; die jeweils zugehörigen  $\alpha$ -Werte werden an die Kurve angeschrieben. In Tab. 2 sind die Spektren einiger wichtiger Apparatefunktionen als Ortskurven aufgezeichnet. Für  $\alpha = 0$  (Gleichlicht, Gleichstrom usw.) hat die Phasenverschiebung stets den Wert 0. Durch eine passende Verschiebung der Apparatefunktion  $A(z)$  längs der  $z$ -Achse [etwa derart, daß der Wert  $z = 0$  durch den Schwerpunkt der von  $A(z)$  und der  $z$ -Achse gebildeten Fläche gelegt wird] kann man es stets erreichen, daß die Phasenverschiebung bei niedrigen Frequenzen kleinere Werte annimmt als bei unverschobener Apparatefunktion; dadurch nehmen allerdings die Verschiebungen bei höheren Frequenzen schnell große Werte an. Einer Verschiebung um den Betrag  $-\varepsilon$  im Bereich der Variablen  $z$  entspricht nämlich eine Multiplikation der Spektralfunktion  $F(i\alpha)$  mit dem Faktor  $e^{-i\alpha\varepsilon}$ :

$$\mathfrak{F}\{A(z + \varepsilon)\} = e^{-i\alpha\varepsilon} \cdot F(i\alpha) = r(\alpha) \cdot e^{i(\varphi(\alpha) - \alpha\varepsilon)}.$$

Ein Beispiel gibt Tab. 2, 1 und 2. Die einseitig (d. h. nur für  $z \geq 0$  existierende) unsymmetrische Exponentialfunktion  $A(z) = e^{-z}$  liefert die Spektralfunktion

$$F(i\alpha) = \frac{1}{1 + \alpha^2} + i \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{1 + \alpha^2}} e^{i \cdot \operatorname{arc tg} \alpha}.$$

Die größte Phasenverschiebung beträgt  $\pi/2$  und wird erreicht bei  $\alpha = \infty$ , d. h.  $\operatorname{arc tg} \alpha = \frac{\pi}{2}$ . Die Ortskurve selbst ist ein Halbkreis mit dem Radius  $1/2$  um den Punkt  $(1/2; 0)$  innerhalb des 1. Quadranten, wie man leicht sieht, wenn man  $F(i\alpha)$  in der Form

$$F(i\alpha) = \frac{1}{1 - i\alpha}$$

schreibt. Die Inversion der Nennergeraden  $1 - i\alpha$  ergibt einen Kreis, der durch den Ursprung geht und in den Quadranten  $(1; i)$  und  $(1; -i)$  verläuft. Der zu negativen Werten von  $\alpha$  gehörende Halbkreis entfällt, da negative Frequenzen keine physikalische Bedeutung haben.

1) Vgl. dazu etwa: G. Oberdorfer, Die Ortskurventheorie der Wechselstromtechnik, München/Berlin 1934.

Verschiebt man nun diese Apparatefunktion auf der  $z$ -Achse derart, daß die durch den Schwerpunkt bei  $z = \ln 2 = 0,69$  gehende Ordinate in den Nullpunkt verlegt wird, dann erhält man zu der nunmehr zweiseitig-unsymmetrischen Apparatefunktion

$$A(z) = \begin{cases} e^{-(0,69+z)} & \text{für } z \geq -0,69, \\ 0 & \text{für } z < -0,69, \end{cases}$$

die in Tab. 2 als Beispiel 2 wiedergegebene Spektralfunktion

$$F(i\alpha) = \frac{1}{1-i\alpha} e^{-i \cdot 0,69\alpha} = \frac{\cos 0,69\alpha + i \sin 0,69\alpha + i(\alpha \cos 0,69\alpha - \sin \alpha)}{1 + \alpha^2},$$

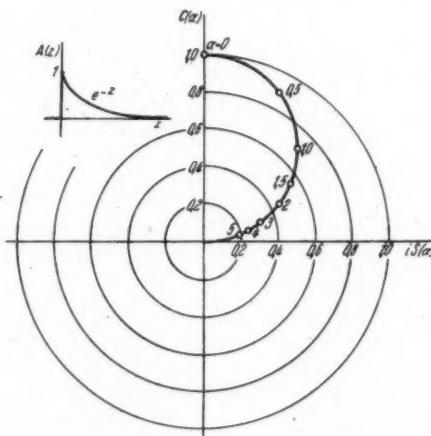
die nunmehr bei niedrigen Frequenzen eine kleinere Phasenverschiebung aufweist als die Spektralfunktion der ursprünglichen Apparatefunktion.

Auf den eigentlichen Frequenzgang der Apparatefunktion, der ja von der Phasenlage unabhängig ist, hat eine derartige Verschiebung natürlich keinen Einfluß. Zur Vervollständigung der

Tabelle 2

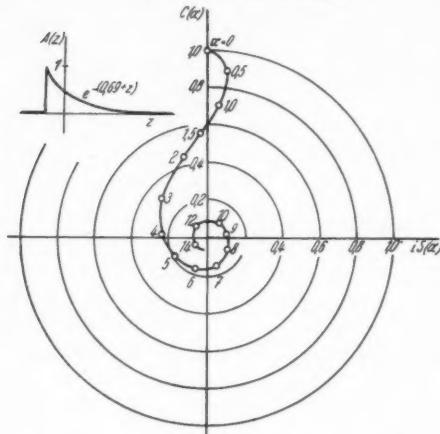
Ortskurven der Spektren  $F(i\alpha)$  unsymmetrischer Apparatefunktionen  $A(z)$

$$\text{Normierung: } \int_{-\infty}^{+\infty} A(z) dz = 1$$



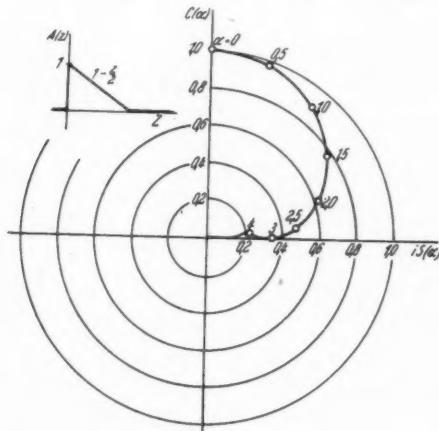
$$1. \quad A(z) = \begin{cases} e^{-z} & \text{für } z > 0 \\ 0 & \text{für } z < 0 \end{cases}, \quad F(i\alpha) = \frac{1}{1 + \alpha^2} + i \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$$

Tabelle 2 (Fortsetzung)



$$2. \quad A(z) = \begin{cases} e^{-(0.69 + z)} & \text{für } z > -0.69, \\ 0 & \text{für } z < -0.69, \end{cases}$$

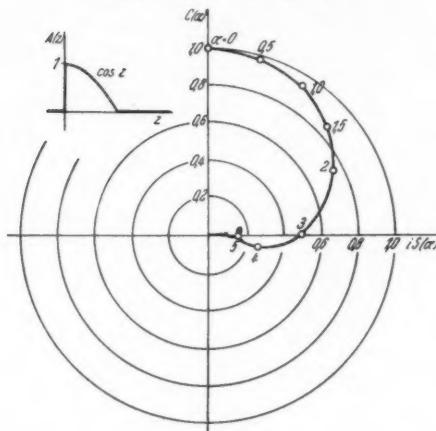
$$F(i\alpha) = \frac{\cos 0.69\alpha + \alpha \sin 0.69\alpha}{1 + \alpha^2} + i \left[ \frac{\alpha \cos 0.69\alpha - \sin 0.69\alpha}{1 + \alpha^2} \right]$$



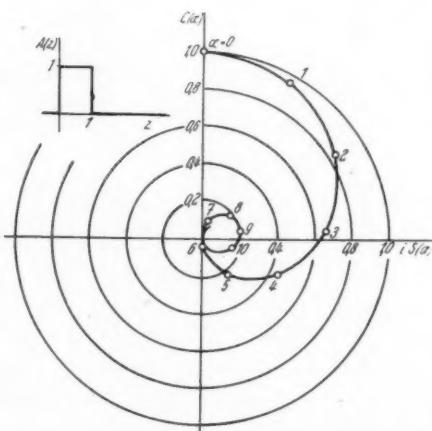
$$3. \quad A(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{2} & \text{für } 0 < z < 2, \\ 0 & \text{für } z > 2 \text{ und } z < 0, \end{cases}$$

$$F(i\alpha) = \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} - \frac{i}{\alpha} \left( \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\alpha} - 1 \right)$$

Tabelle 2 (Fortsetzung)



$$4. \quad A(z) = \begin{cases} \cos z & \text{für } 0 < z < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{für } z > \frac{\pi}{2} \text{ und } z < 0, \end{cases} \quad F(i\alpha) = \frac{\cos \alpha \frac{\pi}{2}}{1 - \alpha^2} + i \frac{\sin \alpha \frac{\pi}{2} - \alpha}{1 - \alpha^2}$$

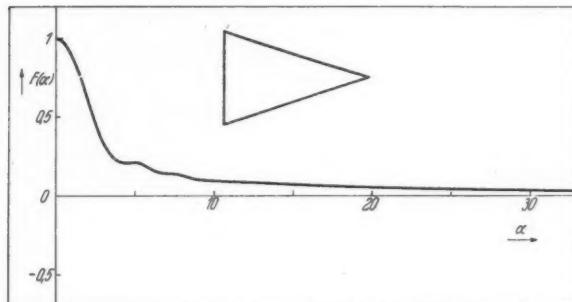


$$5. \quad A(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < z < 1, \\ 0 & \text{für } z > 1 \text{ und } z < 0, \end{cases} \quad F(i\alpha) = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} - i \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$$

Tabelle 3

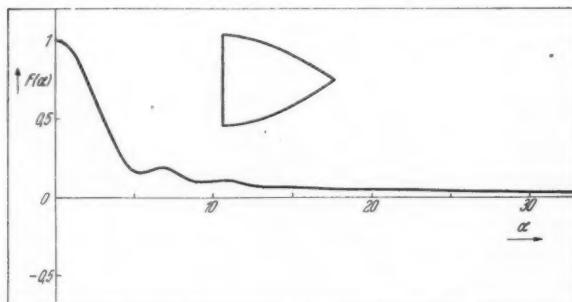
Spektren  $F(\alpha)$  unsymmetrischer Apparatefunktionen  $A(z)$ 

$$\text{Normierung: } \int_{-\infty}^{+\infty} A(z) dz = q$$



$$1. \quad A(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{2q} & \text{für } 0 < z < 2q, \\ 0 & \text{für } z > 2q \text{ und } z < 0, \end{cases}$$

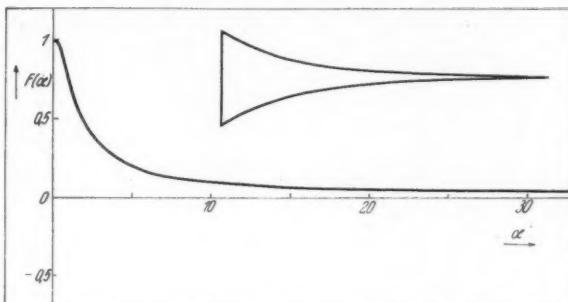
$$F(\alpha) = q \sqrt{\left[ \frac{\sin q\alpha}{q\alpha} \right]^4 + \frac{1}{(q\alpha)^2} \left[ \frac{\sin q\alpha \cdot \cos q\alpha}{q\alpha} - 1 \right]^2}$$



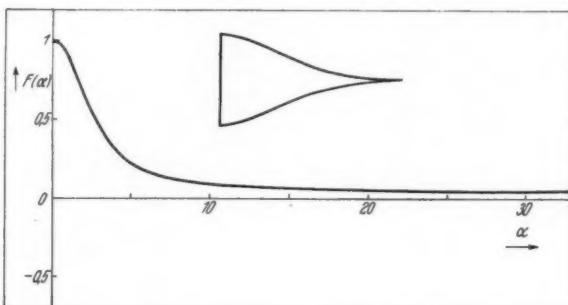
$$2. \quad A(z) = \begin{cases} \cos \frac{z}{q} & \text{für } 0 < z < \frac{q\pi}{2}, \\ 0 & \text{für } z > \frac{q\pi}{2} \text{ und } z < 0, \end{cases}$$

$$F(\alpha) = q \frac{1}{1 - (q\alpha)^2} \sqrt{1 - 2q\alpha \sin \frac{q\alpha\pi}{2} + (q\alpha)^2}$$

Tabelle 3 (Fortsetzung)



$$3. \quad A(z) = \begin{cases} e^{-\frac{z}{q}} & \text{für } z > 0, \\ 0 & \text{für } z < 0, \end{cases} \quad F(\alpha) = q \frac{1}{\sqrt{1 + (q\alpha)^2}}$$



$$4. \quad A(z) = \begin{cases} e^{-\frac{\pi z^2}{4q^2}} & \text{für } z > 0, \\ 0 & \text{für } z < 0, \end{cases}$$

$$F(\alpha) = q e^{-\left(\frac{q\alpha}{\pi}\right)^2} \sqrt{1 + \frac{4}{\pi} U^2 \left(\frac{q\alpha}{\pi}\right)^2}$$

Übersicht sind in Tab. 3 die Frequenzgänge  $F(\alpha) = +\sqrt{C^2(\alpha) + S^2(\alpha)}$  einiger unsymmetrischer Apparatefunktionen dargestellt.

$$1) \quad U(x) = \int_0^x e^{\xi^2} d\xi.$$

## e) Spektralfunktionen mit Nullstellen

Für die Rückgängigmachung der durch eine Apparatefunktion hervorgerufenen Verwischung ist die Kenntnis derjenigen Apparatefunktionen von Wichtigkeit, die Sperrbereiche besitzen; im einfachsten Fall bestehen diese Sperrbereiche in Nullstellen der Spektralfunktion (Tab. 1, 1—5). Eine Nullstelle im Spektrum bedeutet ja, daß die zugehörige Frequenz in der Bildfunktion nicht erscheint und deshalb auf keine Weise nachträglich wieder herausgefunden werden kann; ein Reduktionsverfahren muß also an dieser Stelle divergieren. Für die Tonfilmtechnik bedeutet das, daß Nullstellen im Frequenzspektrum, die bei der Aufnahme infolge der Spaltform entstehen, bei der Wiedergabe durch keinerlei Maßnahmen an der Verstärkerapparatur wieder zum Vorschein gebracht werden können. Andererseits kann man durch eine richtig gewählte Spaltform unter Umständen störende Frequenzen unterdrücken.

Einer beliebig vorgelegten Apparatefunktion ist nun nicht ohne weiteres anzusehen, ob ihr Spektrum eine Nullstelle besitzt; es gibt keine allgemein gültigen Kriterien dafür. Einige spezielle Klassen solcher Funktionen kann man jedoch angeben. Es sind dies

1. die durch symmetrische Ergänzung aus denjenigen einseitig-unsymmetrischen Apparatefunktionen entstehenden Funktionen, in deren Spektrum eine Phasenverschiebung von mehr als  $90^\circ$  vorkommt,
2. die Funktionen, die sich als Zentraldifferenz einer Verteilungsfunktion<sup>1)</sup> darstellen lassen und
3. die Funktionen, die durch arithmetische Mittelwertbildung aus einer Apparatefunktion hervorgehen, deren Spektrum nullstellenfrei ist.

Zu 1. Der Realteil  $C(\alpha)$  einer Funktion, deren Spektralfunktion an einer Stelle eine Phasenverschiebung der zugehörigen Versuchswelle von  $90^\circ$  hervorruft, verschwindet; der allein vorhandene Imaginärteil  $S(\alpha)$  wird durch den entgegengesetzt gleichen Imaginärteil der symmetrischen Ergänzung kompensiert, so daß das Spektrum der symmetrischen Apparatefunktion dort eine Nullstelle aufweist.

Zu 2. Wenn  $V(z)$  eine Verteilungsfunktion ist, dann ergeben sich die Funktionen dieser zweiten Klasse zu

$$A(z) = V\left(z + \frac{\omega}{2}\right) - V\left(z - \frac{\omega}{2}\right).$$

1) Unter einer „Verteilungsfunktion“ versteht man in der Funktionalanalysis — im Gegensatz zur Statistik — eine niemals abnehmende Funktion, z. B.  $\text{arc tg } z$ ,  $\text{tg } z$ .



a)

b)

Abb. 1. Strukturfälschungen bei stroboskopischen Untersuchungen.

- a) Beleuchtung mit rechteckigen Lichtblitzen.
- b) Beleuchtung mit exponentiellen Lichtblitzen

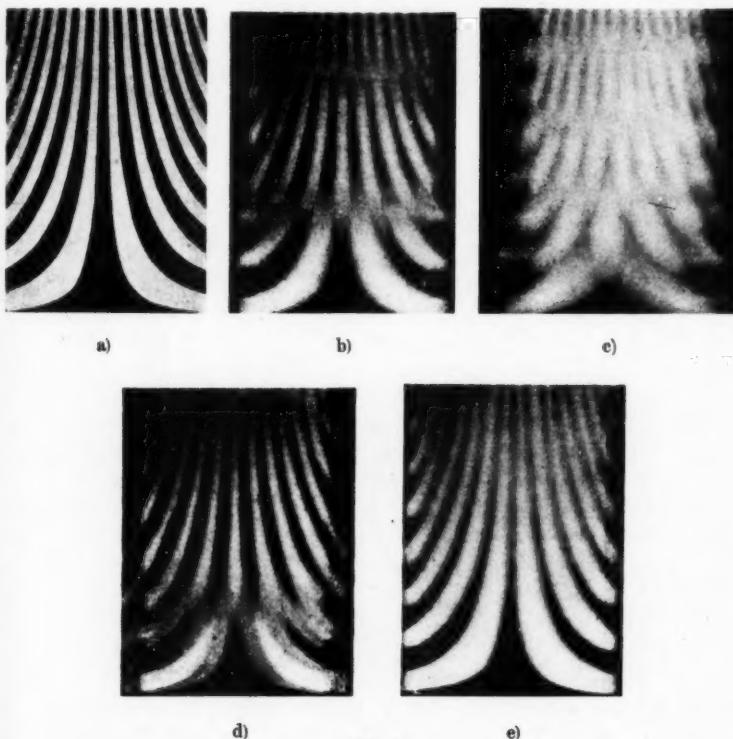


Abb. 2

## Unterschrift zu Abb. 2:

Durch Verschiebung eines Hyperbelrasters entstehende Spektren.

- a) Unverschobenes Raster.
- b) Rechteckfunktion (Tab. 1, 1).
- c) Wie b), jedoch größere Breite der Rechteckfunktion.
- d) Zwei aufeinanderfolgende Rechteckfunktionen gleicher Breite (Tab. 1, 2).
- e) Exponentialfunktion (Tab. 1, 6)

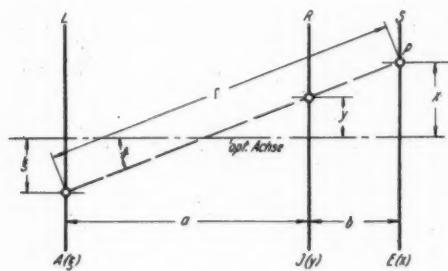


Abb. 3. Schematische Darstellung der Projektion mittels ausgedehnter Lichtquelle.

L Lichtquelle, R Raster, S Auffangeschirm

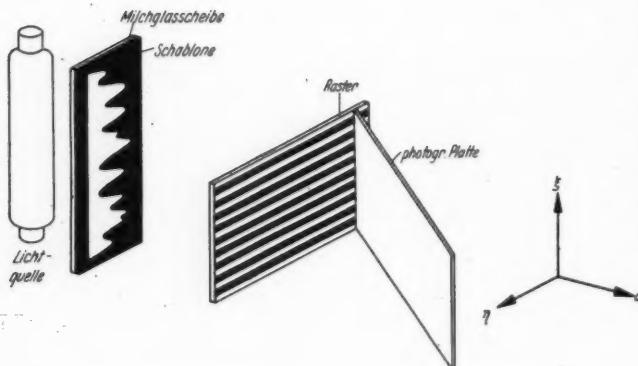


Abb. 4. Projektionsperiodograph

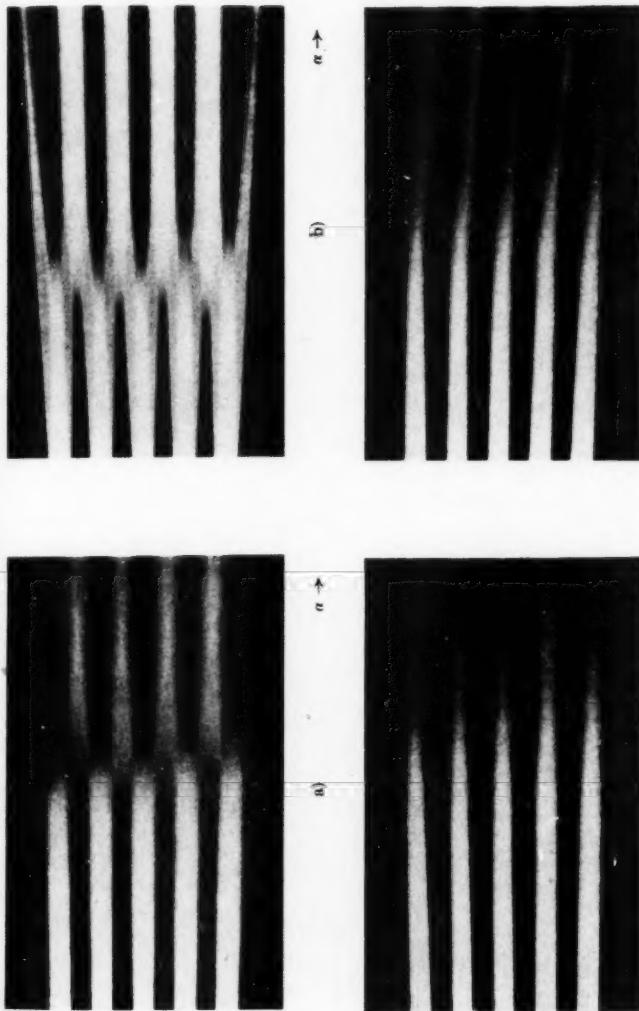


Abb. 5. Mit dem Projektionsperiodographen aufgenommene Spektren bei endlicher Zahl der Rasterstriche. a) Rechteckfunktion (Tab. 1, 1). b) Dopperechteckfunktion (Tab. 1, 2). c) Exponentialfunktion (Tab. 1, 6). d) Einseitige Exponentialfunktion (Tab. 3, 3)

14912 XUM

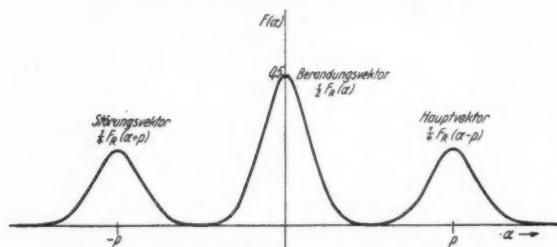


Abb. 6. Spektrum eines symmetrischen Wellenzuges

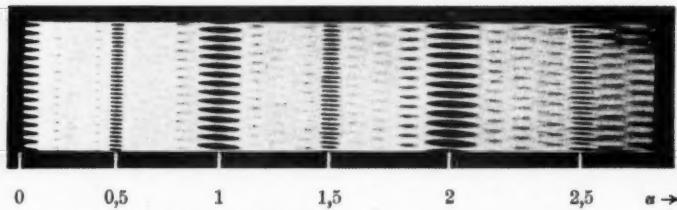


Abb. 7. Spektrum (Periodogramm) einer aus äquidistanten Zacken bestehenden Apparatefunktion mit rechteckiger Berandung.

Berandungsvektor bei  $\alpha = 0$ . Hauptvektoren bei  $\alpha = 1$  (Grundperiode),  
 $\alpha = 2$  (1. Oberwelle).

Effekte höherer Ordnung, hervorgerufen durch die nicht sinusförmige Transparenz des Rasters, bei  $\alpha = 0,5; 1,5; 2,5$ ; (1. Oberwelle des Rasters, Grundperiode usw. des Hauptvektors), ferner bei  $\alpha = 0,25; 0,75; 1,25$  usw. (3. Oberwelle des Rasters, Grundperiode usw. des Hauptvektors)

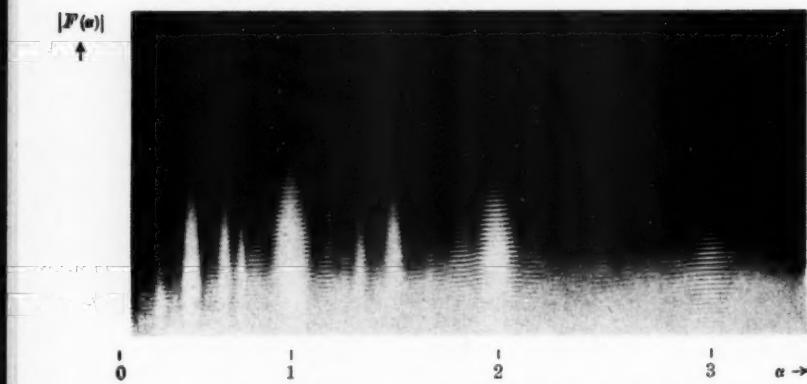


Abb. 8. Sichtbarmachung der Amplituden der Teilschwingungen durch einen während des Kopierprozesses vorgeschalteten Graukeil

Dabei ist  $\omega$  die „Spanne“ der Differenz. Um zu beweisen, daß die so gebildete Apparatefunktion  $A(z)$  spektrale Nullstellen hat, setzen wir etwa

$$V(z) = \int B(\zeta) d\zeta$$

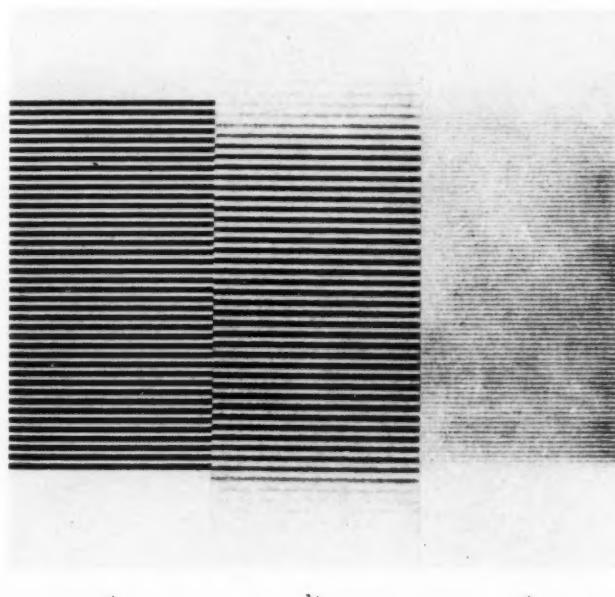


Abb. 9. Originalraster (a), Hauptvektor seiner Grundperiode (b) und der Grundperiode des Effektes 2. Ordnung (c)

und erhalten

$$A(z) = \int_{z - \frac{\omega}{2}}^{z + \frac{\omega}{2}} B(\zeta) d\zeta.$$

Durch Einführen einer Rechteckfunktion

$$R(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } |z| < \frac{\omega}{2}, \\ 0 & \text{für } |z| > \frac{\omega}{2}. \end{cases}$$

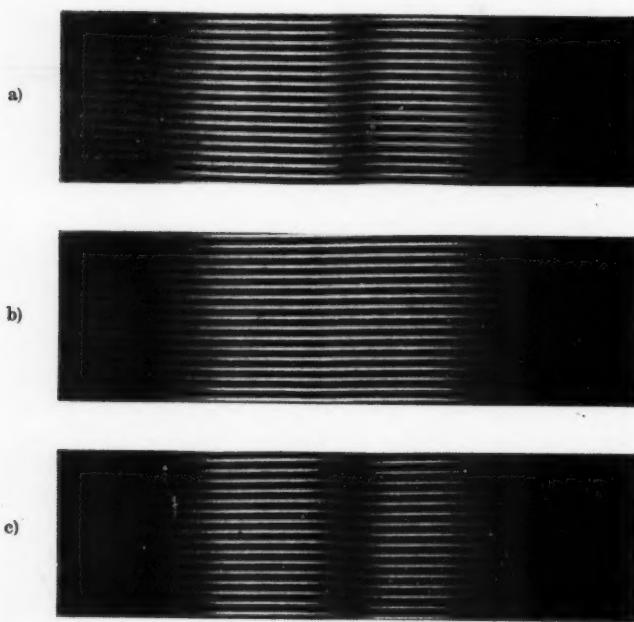


Abb. 10. Einfluß der Phasen auf die Auflösbarkeit benachbarter Periodizitäten.

Phasenverschiebung {  
 a)  $+90^\circ$  (Trennung der Perioden),  
 b)  $0^\circ$  (keine Trennung der Perioden),  
 c)  $-90^\circ$  (Trennung der Perioden)

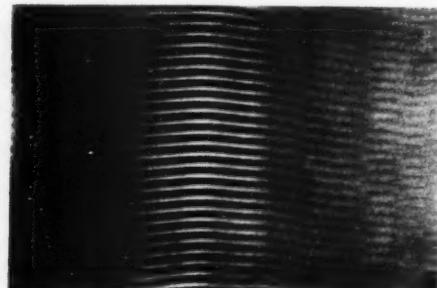


Abb. 11. Einander ablösende quasipersistente Perioden;  
 Verhältnis der Frequenzen 10:11

als Kern formen wir dieses Integral in ein zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  zu erstreckendes Produktintegral

$$A(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\zeta) R(\zeta - z) d\zeta = B(z) * R(z)$$

um. Die Fouriertransformierte dieses Faltungsprodukts ist gleich dem Produkt der jeweiligen Transformierten der einzelnen Faktoren<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{A(z)\} &= \mathfrak{F}\{B(z) * R(z)\} \\ &= \mathfrak{F}\{B(z)\} \cdot \mathfrak{F}\{R(z)\}.\end{aligned}$$

Das Spektrum einer Rechteckfunktion mit der Spanne (= Spaltbreite)  $\omega$  ist aber (vgl. Tab. 1, 1)

$$\mathfrak{F}\{R(z)\} = \frac{\sin \omega \pi}{\frac{2}{\omega \pi}}.$$

Die Nullstellen dieser Funktion liegen bei

$$\alpha = \frac{2k\pi}{\omega} (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Zumindest an diesen Stellen hat also auch das Spektrum von  $A(z)$  Nullstellen, solange die Spanne  $\omega$  einen endlichen Wert besitzt. Beispielsweise treten in den Spektren der Apparatefunktionen

$$A(z) = \arctg\left(z + \frac{\omega}{2}\right) - \arctg\left(z - \frac{\omega}{2}\right)$$

und

$$A(z) = \text{Ig}\left(z + \frac{\omega}{2}\right) - \text{Ig}\left(z - \frac{\omega}{2}\right)$$

die angegebenen Nullstellen auf.

1) S. Bochner, a. a. O., S. 46; N. Wiener, a. a. O.; G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplacetransformation, Berlin 1937, S. 161; K. W. Wagner, Operatorenrechnung nebst Anwendungen in Physik und Technik, Leipzig 1940, S. 60.

Unterschrift zu Abb. 12:  
Unter Benutzung der „natürlichen Selektion“ erhaltenes Periodogramm von einander ablösenden Perioden

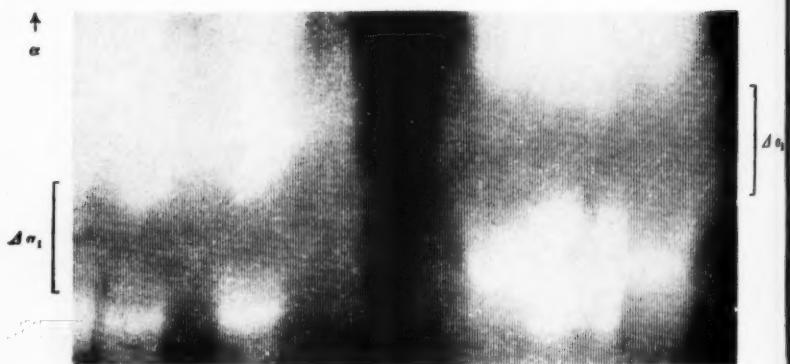


Abb. 12  $\rightarrow$

V  
4  
1  
1  
9  
1  
4  
2  
XUM



a)



b)

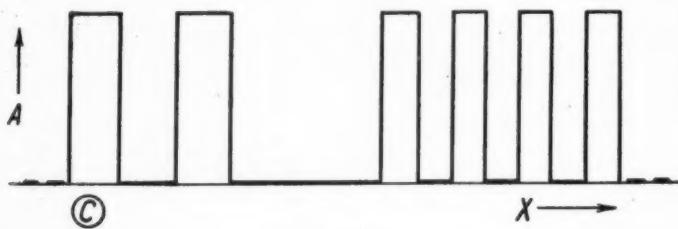


Abb. 13

Zu 3. Die Funktionen der dritten Klasse lassen sich darstellen in der Form

$$A(z) = \frac{1}{2} \left( G\left(z + \frac{\omega}{2}\right) + G\left(z - \frac{\omega}{2}\right) \right),$$

wenn  $G(z)$  etwa eine symmetrische Apparatefunktion vom Glockentypus bezeichnet. Daß das Spektrum dieser Funktion  $A(z)$  Nullstellen besitzt, ergibt sich leicht aus folgender Betrachtung. Eine um den Betrag  $\omega/2$  auf der  $z$ -Achse verschobene Apparatefunktion liefert ein mit

$$e^{\frac{i\alpha\omega}{2}}$$

multipliziertes Spektrum (Verschiebungssatz). Dementsprechend ist das Spektrum der um  $-\frac{\omega}{2}$  verschobenen Apparatefunktion mit

$$e^{\frac{-i\alpha\omega}{2}}$$

zu multiplizieren. Die Summe beider Funktionen liefert das reelle Spektrum

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \left\{ \frac{1}{2} \left( G\left(z + \frac{\omega}{2}\right) + G\left(z - \frac{\omega}{2}\right) \right) \right\} &= \frac{1}{2} \left( e^{\frac{i\alpha\omega}{2}} + e^{\frac{-i\alpha\omega}{2}} \right) \cdot \mathfrak{F} \{G(z)\} \\ &= \cos \frac{\alpha\omega}{2} \cdot \mathfrak{F} \{G(z)\}. \end{aligned}$$

Dieses Spektrum besitzt Nullstellen wenigstens bei

$$\alpha = \frac{(2k-1)\pi}{\omega} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Ein Beispiel für eine derartige Funktion ist

$$A(z) = \frac{1}{2} \left( e^{-\left(z + \frac{\omega}{2}\right)^2} + e^{-\left(z - \frac{\omega}{2}\right)^2} \right) = e^{-\frac{\omega^2}{4}} \cdot e^{-z^2} \cdot \mathfrak{F} \{ \omega z \}.$$

*Unterschrift zu Abb. 18:*

Gegenseitige Abhängigkeit des frequenzmäßigen Auflösungsvermögens  $\Delta\alpha$  und des örtlichen Auflösungsvermögens voneinander bei verschiedener Breite des Analysenintervalls.

- Mäßig breites Analysenintervall, gute frequenzmäßige und örtliche Auflösung.
- Schmales Analysenintervall, schlechte frequenzmäßige, dafür aber übertrieben gute örtliche Auflösung.
- Apparatefunktion der vorstehenden Periodogramme.

( $\Delta\alpha_1$  Bandbreite der langwelligen,  
 $\Delta\alpha_2$  Bandbreite der kurzwelligen Periodizität im Frequenzmaß)

V  
4  
1  
1  
9  
4  
2  
XUM

## d) Mehrfache Verwischung

Einige — insbesondere optische — Apparate liefern als meßbare Bildfunktion eine *zweifach* verwischte Originalfunktion; beispielsweise wird bei einem Spektrometer das durch den Kollimatorspalt bereits einmal verunreinigte Spektrum durch den Fernrohrspalt „abgetastet“ und dabei ein zweites Mal verunreinigt. Wir wollen uns die Wirkung einer solchen zweifachen Verwischung klarmachen.

Eine periodische Originalfunktion der Form  $e^{i\alpha x}$  wird durch die Apparatefunktion  $A_1(z)$  des Kollimators zu einer ersten Bildfunktion

$$E_1(x) = F_1(i\alpha) \cdot e^{-i\alpha x}$$

verwischte, wenn  $F_1(i\alpha)$  die Fouriertransformierte von  $A_1(z)$  ist. Diese Funktion wird nun bei der durch den Fernrohrspalt bzw. dessen Apparatefunktion  $A_2(z)$  erfolgenden *zweiten* Verwischung als Originalfunktion angesetzt, so daß sich als zweite Bildfunktion der Ausdruck

$$E_2(x) = F_1(i\alpha) \cdot F_2(i\alpha) \cdot e^{-i\alpha x}$$

ergibt. Das Spektrum einer zweimaligen Verwischung erscheint also hier als Produkt der Einzelspektren:

$$F_{\text{II}}(i\alpha) = F_1(i\alpha) \cdot F_2(i\alpha).$$

Hieraus ergibt sich sofort die bekannte Tatsache, daß die von zwei Spalten nacheinander hervorgerufene Verwischung des optischen Spektrums dann am geringsten ist, wenn beide Spalte gleich breit sind<sup>1)</sup>; haben etwa die beiden Spalte die Breiten  $s_1$  und  $s_2$ , dann ist das in diesem Fall reelle Gesamtspektrum gegeben durch

$$F(\alpha) = \frac{\sin \frac{s_1 \alpha}{2}}{\frac{s_1 \alpha}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{s_2 \alpha}{2}}{\frac{s_2 \alpha}{2}}.$$

Die *erste* Nullstelle dieser Funktion liegt aber da, wo der breitere der beiden Spalte allein seine erste Nullstelle haben würde, so daß durch eine noch so starke Verengerung des zweiten Spaltes keine Verbesserung des Auflösungsvermögens erzielt werden kann. Die Zahl der Nullstellen in der Spektralfunktion  $F(\alpha)$  ist am kleinsten, wenn beide Spalte die gleiche Breite  $s$  haben. In diesem Fall vereinfacht sich  $F(\alpha)$  zu

$$F(\alpha) = \left| \frac{\sin \left( \frac{s \alpha}{2} \right)}{\frac{s \alpha}{2}} \right|^2,$$

dem bekannten Spektrum des *Dreieckspaltes* (Tab. 1, 3).

1) Vgl. F. Hoffmann, Ztschr. f. Phys. 37. S. 60. 1926.

Zu erwähnen ist noch, daß bei Gleichheit der beiden Spalte zwar Nullstellen im Spektrum, aber keine Phasenverschiebungen von  $180^\circ$  (Vertauschung von Maximum und Minimum) mehr auftreten.

Genau so, wie man das Spektrum zweier Rechteckspalte durch Anwendung der Fouriertransformation auf einen Ersatzspalt, den Dreieckspalt, erhalten kann, lassen sich für alle denkbaren Kombinationen von Apparatefunktionen Ersatzfunktionen angeben. Wie wir schon wissen, gehört zu dem Spektrenprodukt  $F_1(i\alpha) \cdot F_2(i\alpha)$  als Apparatefunktion das Faltungsprodukt der beiden einzelnen Apparatefunktionen  $A_1(z)$  und  $A_2(z)$ :

$$A_{\text{Ersatz}} = A_1(z) * A_2(z) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\zeta) A_2(\zeta - z) d\zeta.$$

Insbesondere liefert  $n$  fache Verwischung mit der gleichen Apparatefunktion  $A(z)$  als Ersatzfunktion die  $n$  fache Iteration

$$A_{(n)}(z) = \underbrace{A(z) * A(z)}_{1.} * \underbrace{A(z) * A(z)}_{2.} * \dots * \underbrace{A(z)}_{n.} \equiv A(z)^{*n}.$$

## II. Physikalische Methoden zur Darstellung von Spektralfunktionen

### a) Bewegtes Hyperbelraster

Es liegt nahe, die Bildung des Faltungsprodukts

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) J(\xi - x) d\xi$$

durch eine wirkliche Verwischung etwa so vorzunehmen, daß die beispielsweise als Transparent nach Art des in der Tonfilmtechnik üblichen Intensitätsverfahrens vorliegende Originalfunktion  $J(x)$  in der  $x$ -Richtung (Filmlängsrichtung) gleichförmig bewegt wird<sup>1)</sup>. Mit einer feststehenden Kamera wird nun die auf dem Film aufgezeichnete Struktur photographiert, während die Intensität des den Film von der Rückseite durchstrahlenden Lichts gemäß der Apparatefunktion  $A(z)$  geändert wird, wobei jetzt  $z$  der Zeit proportional ist. Statt im durchfallenden Licht kann auch im einfallenden Licht photographiert werden, wobei der Film durch einen Papierstreifen zu ersetzen ist. Die Steuerung der Lichtintensität kann nach einem der üblichen Modulationsverfahren vorgenommen werden.

Zeichnet man  $J(x)$  als periodische Rechteckfunktion in der Weise auf, daß man auf ein Blatt weißen Karton äquidistante,

1) Vgl. auch den optischen Integratoren von T. S. Gray, Journ. Frankl. Inst. 212, S. 77. 1931.

parallele Linien aufträgt, dann ergibt die in der beschriebenen Weise bei Bewegung des Kartons senkrecht zur Richtung der aufgezeichneten Linien vorgenommene photographische Aufnahme die zu dieser periodischen Funktion gehörende Bildfunktion. Ihre Amplitude liefert im wesentlichen [sofern der Einfluß der aus der Rechteckstruktur von  $J(x)$  entspringenden höheren Harmonischen vernachlässigt wird] das Spektrum der als zeitlicher Lichtverlauf gegebenen Apparatefunktion für die Frequenzkoordinate  $\alpha = \frac{1}{a}$ , wobei unter  $a$  der zeitliche Abstand zweier korrespondierender Punkte der Rechteckfunktion  $J(x)$  verstanden sei. Man berechnet  $a$  leicht aus der „Gitterkonstanten“  $d$  der Streifen und der Vorschubgeschwindigkeit  $v$  des Films oder Papierstreifens zu

$$a = \frac{d}{v}.$$

Damit wird

$$\alpha = \frac{v}{d};$$

Aufnahmen bei wechselnder Vorschubgeschwindigkeit gestatten also, für alle interessierenden Frequenzen das Spektrum photographisch zu ermitteln<sup>1)</sup>.

Statt dessen kann man auch ein Raster mit veränderlicher Gitterkonstante aufzeichnen und so durch einmalige Aufnahme bei konstanter Vorschubgeschwindigkeit das Spektrum in einem größeren Frequenzbereich erhalten. Bezeichnet  $w$  die zur Vorschubrichtung senkrechte Koordinate, dann erhält man einen linearen Frequenzmaßstab, wenn man die Gitterkonstante  $d \sim \frac{1}{w}$  wählt. Ein nach diesen Grundsätzen hergestelltes Raster besteht demnach aus Hyperbelästen Abb. 2a (S. 277). Einige mit diesem Hyperbelraster hergestellte Aufnahmen von Spektren zeigen die Abb. 2b—e. Bei der Auswertung dieser Spektren ist zu berücksichtigen, daß die als Testraster verwendete Rechteckfunktion nur positive Werte besitzt<sup>2)</sup> und infolgedessen als eine Funktion konstanter Helligkeit mit überlagerter periodischer Wechselhelligkeit aufgefaßt werden muß. Der Ordinatennullpunkt der Spektralfunktion liegt demgemäß nicht bei dem Helligkeitseindruck schwarz oder weiß, sondern bei einem Grauwert. Schwarze und weiße Strukturen müssen auf diesen Grauwert bezogen werden und liefern so positive bzw. negative

1) K. Stumpff, Astronom. Nachr. 223. S. 187. 1924/25; D. R. P. 398 658.  
2) T. S. Gray, a. a. O.

Anteile. Es ist dabei gleichgültig, ob man dem Eindruck schwarz oder dem Eindruck weiß den Wert + 1 zuerkennt.

Würde man die Zeichnung des Testrasters derart abändern, daß durch Anwendung von Halbtönen aus der Rechteckfunktion eine in der Vorschubrichtung sich sinusförmig ändernde Flächenhelligkeit erzielt würde, dann könnte man aus der photographischen Aufnahme unter Berücksichtigung der Schwärzungskurve der Platte die Spektralfunktion durch Ausphotometrieren längs der  $w$ -Achse unmittelbar gewinnen. Die Herstellung eines solchen Rasters ist aber nicht leicht, so daß man sich im allgemeinen auf ein Rechteckraster beschränken wird, wenn nur ein Überblick über das Verhalten einer bestimmten Apparatefunktion gefordert wird.

Das Verfahren kann mit besonderem Erfolg dort angewendet werden, wo die zu untersuchende Apparatefunktion schon als zeitlich veränderliche Lichtintensität vorliegt; so wurden die Spektren von Klängen durch K. Imahori<sup>1)</sup> in der Weise untersucht, daß als Testraster ein konvergentes Geradenbüschel verwendet wurde, welches sich in verhältnismäßig einfacher Weise als Sinusraster herstellen läßt<sup>2)</sup>. Durch dieses Raster hindurch wird ein bewegter Film von einer Lichtquelle belichtet, deren Intensität von dem zu untersuchenden Vorgang gesteuert wird. Auf dem Film erhält man nach der Entwicklung das Spektrum des Vorganges, allerdings in einem verzerrten Maßstab.

#### b) Der Projektionsperiodograph

Wenn die zu untersuchende Apparatefunktion periodische oder nahezu periodische Anteile besitzt, dann pflegt man die Spektralfunktion als „Periodogramm“ dieser Apparatefunktion zu bezeichnen. Imahoris Gerät ist also in diesem Sinne ein Periodograph für zeitlich veränderliche Lichtintensitäten endlicher Dauer. Sehr oft liegt nun die auf Periodizitäten zu durchforschende Funktion nicht als zeitlich veränderliche Lichtintensität, sondern in Form einer Wertereihe oder Kurve vor. Die Anwendung des Periodographen mit bewegtem Sinusraster bzw. daran vorbeigeführtem Film stößt dann auf Schwierigkeiten, weil der zu untersuchende Vorgang zunächst in proportionale Lichtschwankungen umgewandelt werden muß. Eine andersartige Anordnung unter ausschließlicher Verwendung feststehender Teile ergibt sich durch folgende Überlegung.

1) K. Imahori, Journ. Fac. Sci. Hokkaidō Imp. Univ. Ser. II 33. S. 57. 1940.

2) Eine einfache Methode findet sich ferner bei B. Germanasky, Ann. d. Phys. [5] 7. S. 453. 1930.

V  
4  
1  
1  
9  
1  
9  
4  
2  
XUM

Zur Darstellung des Spektrums einer beliebigen Apparatefunktion ist offenbar nur erforderlich, daß ein Raster mit sinusförmiger Transparenzverteilung („Sinusraster“) in passender Weise „verwisch“ wird. Nun kann an die Stelle einer zeitlichen auch eine örtliche Verwischung treten<sup>1)</sup>, wie sie sich etwa bei der Zentralprojektion unter Verwendung einer ausgedehnten Lichtquelle zeigt. Abb. 3 (S. 278) möge die dort vorliegenden Verhältnisse näher erläutern.

Eine im Abstand  $a$  vor einem Raster  $R$  befindliche ausgedehnte bandförmige Lichtquelle  $L$  beleuchtet durch das Raster hindurch einen Auffangschirm  $S$ , der parallel zu dem Raster steht und von diesem den Abstand  $b$  haben soll. Die ausgesandte Lichtintensität  $A(\xi)$  soll ebenso wie die Transparenz des Rasters  $J(y)$  nur in der  $\xi$ - bzw.  $y$ -Richtung variieren, in der zur Zeichenebene senkrechten Richtung  $\eta$  dagegen konstant sein. Bezeichnet  $i$  die spezifische Intensität der Lichtquelle, dann liefert das Lambertsehe Gesetz für einen Aufpunkt  $P(x; b)$  die Beleuchtungstärke

$$(1) \quad E(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\xi) J(y) \cos^2 \vartheta}{r^2} d\xi,$$

wenn mit  $y$  die Ordinate des Durchstoßpunktes des betrachteten Lichtstrahls durch die Rasterebene, mit  $\vartheta$  der Winkel dieses Lichtstrahls gegen die optische Achse und mit  $r$  der Abstand des Aufpunktes  $P$  von der betrachteten lichtaussendenden Stelle der Lichtquelle bezeichnet wird. Der Abb. 3 entnimmt man die Relationen

$$y = \frac{a}{a+b} (x + \xi) - \xi = \frac{1}{1 + \frac{b}{a}} x - \frac{1}{1 + \frac{b}{a}} \xi, \quad \cos \vartheta = \frac{a+b}{r}$$

und

$$r = \sqrt{(a+b)^2 + (x - \xi)^2},$$

so daß Gl. (1) nun lautet

$$(2) \quad E(x) = \frac{i}{(a+b)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\xi)}{\left[1 + \left(\frac{x-\xi}{a+b}\right)^2\right]^2} J\left(\frac{1}{1 + \frac{b}{a}} x - \frac{1}{1 + \frac{b}{a}} \xi\right) d\xi.$$

1) Vgl. dazu auch K. Stumpff, a. a. O.; A. E. Douglass, *Astrophys. Journ.* 41. S. 173. 1915.

Ist das verwendete Raster speziell ein Sinusraster, dann ist dessen Transparenzverlauf gegeben durch

$$J(y) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{k} y \right),$$

wenn  $k$  die Gitterkonstante ist. Die Transparenz kann nur Werte zwischen 0 (undurchsichtig) und 1 (durchsichtig) annehmen.

Auf die gleiche Weise lassen sich auch andere Funktionaltransformationen durchführen, wenn man ein Raster mit entsprechender Transparenzverteilung verwendet.

Der Zusammenhang zwischen  $E$  und  $A$  vereinfacht sich, wenn der Abstand  $a$  der Lichtquelle vom Raster groß gegen den Abstand  $b$  des Rasters von der Auffangebene ist; dann kann man  $(x - \xi)$  gegen  $(a + b)$  und weiter  $b$  gegen  $a$  vernachlässigen und erhält

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} E(x) &= \frac{i}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) J\left(x - \frac{b}{a} \xi\right) d\xi \\ &= \frac{i}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) \cdot \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{k} (x - \frac{b}{a} \xi) \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2} E_0 + \frac{1}{2a^2} \left[ \cos \frac{2\pi}{k} x \cdot C(\alpha) + \sin \frac{2\pi}{k} x \cdot S(\alpha) \right]. \end{aligned} \right.$$

Hierin bedeutet

$$E_0 = \frac{i}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) d\xi,$$

die ohne Raster im Aufpunkt vorhandene Beleuchtungsstärke.  $C(\alpha)$  und  $S(\alpha)$  sind die Kosinus- bzw. Sinusintegrale der Apparatefunktion  $A(\xi)$  im Frequenzmaßstab

$$\alpha = \frac{2\pi}{k} \frac{b}{a}.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen liefert also das Lichtgewebe hinter dem Raster das Spektrum der Lichtverteilung  $A(\xi)$  nach Betrag und Phase. Der Ordinatennullpunkt ist dabei durch  $E_0/2$ , d. h. die halbe Beleuchtungsstärke gegeben, die ohne Raster im Aufpunkt vorhanden wäre; positive Werte der Funktion  $E(x)$  werden dann durch eine zwischen  $1/2 E_0$  und  $E$  liegende Intensität, negative Werte dementsprechend durch eine zwischen  $1/2 E_0$  und 0 liegende Intensität dargestellt. Der Frequenzmaßstab ist linear in  $b$ .

Abb. 4 (S. 278) zeigt schematisch die technische Verwirklichung eines solchen optischen *Projektionsperiodographen*. Vor einer lange, schmalen Lichtquelle (Soffittenlampe) in einem Gehäuse, welches mit einer Milchglasscheibe zur besseren Lichtverteilung versehen ist, wird die zu untersuchende Apparatefunktion in Form einer Schablone gesetzt; diese wird aus undurchsichtigem Karton oder dünner Metallfolie derart ausgeschnitten, daß die Fläche zwischen der Funktion selbst und der Abszisse das von der Milchglasscheibe kommende Licht durchläßt. In einem den jeweiligen Erfordernissen anzupassenden Abstand von dieser Schablone wird ein Liniennraster in der aus der Skizze ersichtlichen Weise aufgestellt. Um das gesamte Spektrum gleichzeitig auffangen zu können, wird eine photographische Platte schräg zur optischen Achse, jedoch parallel zur  $\xi$ -Achse unmittelbar hinter das Raster gebracht. Dadurch wird erreicht, daß die verschiedenen Auffangebenen nebeneinander auf der Platte liegen; der Frequenzmaßstab bei dieser Anordnung ist dann

$$\frac{2\pi g \cos \gamma}{k a},$$

wenn mit  $\gamma$  der Neigungswinkel der Platte gegen die optische Achse und mit  $g$  der Abstand eines Plattenpunktes von der Schnittgeraden Platte-Raster bezeichnet wird. Das Spektrum ist demnach um so weiter auseinandergezogen, je schräger die Platte zur optischen Achse steht, je größer das Raster und je größer der Abstand Raster-Lichtquelle ist. Wenn die zu untersuchenden Spektralgebiete größere Ausdehnung haben, nimmt unter Umständen die mittlere Beleuchtungsstärke in den Spektren nach höheren Frequenzen hin in unzulässiger Weise ab; diese Erscheinung kann dadurch beseitigt werden, daß die photographische Platte senkrecht zur optischen Achse und dafür das Raster schräg gestellt wird. Dabei darf dann allerdings die Ordinate der zu analysierenden Funktion nicht zu groß sein, weil sonst das Spektrum unscharf wird.

Verwendet man an Stelle eines Sinusrasters ein Rechteckraster, dann entsteht ein Spektrum, welches man sich durch Überlagerung derjenigen Einzelspektren zusammengesetzt denken kann, die durch die Oberwellen des Rasters entstehen. Diese an sich unerwünschten Spektren fallen aber sofort durch ihre kleinere Periodenlänge auf, sobald sie isoliert auftreten („Effekte höherer Ordnung“, vgl. Abb. 7). Andernfalls bewirken sie nur, daß die photographierten Spektren auch mehr oder weniger rechteckigen Charakter aufweisen. Abb. 5 (S. 279) zeigt die Spektren einiger einfacher Apparatefunktionen, die mit der beschriebenen Anordnung unter Verwendung eines groben

Rasters gewonnen wurden. Die Apparatefunktionen wurden dabei in der Weise normiert, daß der freigelassene Teil der Schablone stets die gleiche Fläche aufwies.

Werden die Platten gleich lange belichtet und entwickelt, dann lassen sich die Spektren der verschiedenen Funktionen unmittelbar durch die Plattenschwärzungen miteinander vergleichen. Es wurde absichtlich ein Raster mit nur 5 durchlässigen Linien verwendet, um die schon eingangs erwähnte Verfälschung der Zahl der Strukturen anschaulich verfolgen zu können. Während bei rechteckiger Apparatefunktion (Abb. 5a) nach dem Durchgang durch die Nullage die Zahl der hellen Streifen nur noch 4 beträgt, findet bei exponentieller Apparatefunktion (Abb. 5c) zwar eine schnellere Intensitätsabnahme der hellen Streifen, aber keine Verringerung ihrer Zahl statt.

Die bei unsymmetrischen Apparatefunktionen auftretende Phasenverschiebung äußert sich in einer Verschiebung der Spektren in Richtung der  $z$ -Achse, d. h. senkrecht zur Richtung der Rasterstriche, weil das Sinusglied in Formel (3) einen von Null verschiedenen Wert annimmt. Ein einfaches Beispiel bietet Abb. 5d, wo das Spektrum einer einseitig-unsymmetrischen Apparatefunktion aufgenommen wurde. Die zu jedem  $\alpha$ -Wert gehörende Phasenverschiebung kann unmittelbar abgelesen werden.

Von der Möglichkeit, das Spektrum einer Funktion auf diese einfache Weise sichtbar zu machen, wollen wir nun Gebrauch machen, um das Auftreten von periodischen Anteilen in empirischen Funktionen zu ermitteln. Zu diesem Zweck betrachten wir eine Funktion

$$(4) \quad A(z) = \frac{1}{2} R(z)(1 + \cos p z).$$

$R(z)$  soll dabei eine beliebige Funktion vom Typus einer physikalischen Apparatefunktion, d. h. im Intervall  $[-\infty, +\infty]$  stets positiv und eigentlich integrierbar sein. Wir wollen  $R(z)$  in Anlehnung an die Schwingungslehre die *Dämpfungsfunktion* nennen.  $A(z)$  stellt demnach im wesentlichen einen für große positive und negative Werte von  $z$  verschwindenden Schwingungszug dar; in der Periodenforschung spricht man von einer „quasipersistenten“ Periode<sup>1)</sup>. Wenn  $R(z)$  die Form einer Glockenkurve hat, dann soll die Lage des Wellenzuges durch den Scheitelpunkt dieser Glockenkurve lokalisiert sein. Das Spektrum der Funktion  $A(z)$  lautet:

1) K. Stumpff, Grundlagen und Methoden der Periodenforschung, Berlin 1937.

$$F(i\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi) (1 + \cos p \xi) e^{i\alpha \xi} d\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi) (1 + \cos p \xi) \cos \alpha \xi d\xi$$

$$+ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi) (1 + \cos p \xi) \sin \alpha \xi d\xi.$$

Es ist nun

$$\cos p \xi \cos \alpha \xi = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + p) \xi + \cos(\alpha - p) \xi]$$

und

$$\cos p \xi \sin \alpha \xi = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + p) \xi + \sin(\alpha - p) \xi],$$

mithin

$$F(i\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi) \cos \alpha \xi d\xi + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi) \cos(\alpha + p) \xi d\xi$$

$$+ \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi) \cos(\alpha - p) \xi d\xi + i \left[ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi) \sin \alpha \xi d\xi \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi) \sin(\alpha + p) \xi d\xi + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi) \sin(\alpha - p) \xi d\xi \right].$$

Durch Zusammenfassen der reellen und imaginären einander entsprechenden Terme erhalten wir

$$F(i\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi) e^{i(\alpha + p) \xi} d\xi + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi) e^{i(\alpha - p) \xi} d\xi$$

$$= \frac{1}{2} F_R(i\alpha) + \frac{1}{4} [F_R(i(\alpha + p)) + F_R(i(\alpha - p))].$$

Das Spektrum des Wellenzuges (4) besteht also aus 3 Teilen: dem Spektrum der Dämpfungsfunktion  $R(z)$  und den symmetrisch zum Frequenznullpunkt  $\alpha = 0$  liegenden, um den Betrag  $p$  verschobenen Spektren des Wellenzuges mit den halben Ordinatenwerten. Den Term  $F_R(i(\alpha - p))$ , dessen Maximum im positiven Frequenzbereich liegt, nennt man in der Periodenforschung den „Hauptvektor“, den Term  $F_R(i(\alpha + p))$ , dessen Maximum im (physikalisch nicht realisierbaren) negativen Frequenzbereich liegt, den „Störungsvektor“; sein in den positiven Frequenzbereich hineinragender Teil führt nämlich unter Umständen zu Verfälschungen der *Lage* des *Maximums*.

des Hauptvektors, bzw. zu dessen völliger Auslöschung. Von wesentlich größerer Bedeutung als der Störungsvektor ist jedoch in unserem Fall der Term  $F_R(i\alpha)$ , der das unverschobene Spektrum der Dämpfungsfunktion darstellt. Sein Einfluß ist um so stärker, je niedriger die Frequenz  $p$  des Schwingungszuges und je enger dessen Berandung (physikalisch: je größer das logarithmische Dekrement der Dämpfung) ist. Wir werden deshalb, um uns kurz ausdrücken zu können, den Term  $F_R(i\alpha)$  den „Berandungsvektor“ nennen. Bei beliebigen Schwingungsfunktionen  $A(z)$  tritt er nur auf, wenn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(z) dz \neq 0$$

ist. Das ist bei den hier vorliegenden Funktionen immer der Fall.

In Abb. 6 (S. 280) sind die erwähnten drei Vektorfunktionen für den Fall eines Schwingungszuges mit exponentieller Berandung dargestellt; in dem abgebildeten Beispiel ist die Berandungsfunktion symmetrisch und deshalb die Spektralfunktion reell. Wenn die „Bandbreite“ der Dämpfungsfunktion  $R(z)$  groß gegen  $1/p$  ist, dann liegt das Maximum der Spektralfunktion für die physikalisch allein sinnvollen positiven Frequenzen bei  $\alpha_{\max} = p$ .

Abb. 7 (S. 280) zeigt das mit dem Projektionsperiodographen aufgenommene Spektrum eines oberwellenreichen Schwingungszuges, der am Anfang und Ende plötzlich abbricht; der Berandungsvektor hat demzufolge die Form  $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ , da die Berandung eine Rechteckfunktion ist, die symmetrisch zu  $z = 0$  liegt. Die Nichtlinearität des photographischen Prozesses bewirkt die besonders deutliche Sichtbarkeit der einzelnen Spektren. Als Abszissen treten in der Abbildung unmittelbar die Frequenzen mit nahezu linearer Skala auf. Die Amplituden der Teilschwingungen kann man dadurch meßbar machen, daß man beim Kopieren einen Graukeil zwischen Lichtquelle und photographische Platte bringt, der eine möglichst konstante Transparenzänderung aufweist. Abb. 8 (S. 280) zeigt ein auf diese Weise gewonnenes Amplitudendiagramm.

Die typische Form des Spektrums einer Rechteckfunktion ist nicht nur bei dem Berandungsvektor (Maximum bei  $\alpha = 0$ ), sondern selbstverständlich auch beim Hauptvektor (Maximum bei  $\alpha = 1$ ) und seinen höheren Harmonischen ( $\alpha = 2, 3, \dots$  usw.) festzustellen. Die jeweils symmetrisch um die Hauptvektoren verteilten Maxima und Minima, die durch die rechteckige Berandung des Schwingungszuges hervorgerufen werden, können bei unkritischer Betrachtung

als wirkliche Periodizitäten angesehen werden; man nennt sie deshalb „unechte Periodizitäten“ (spurious periodicities). Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß in Abb. 7 sehr gut die Wirkung des nicht sinusförmigen Analysenrasters zu erkennen ist. Absichtlich wurde ein Raster verwendet, bei dem die Breite der undurchsichtigen Stege 1,5 mm und die Breite der durchsichtigen Zwischenräume 0,5 mm betrug. Auf diese Weise tritt die zweite Harmonische des Rasters (d. h. ein Raster mit der halben Gitterkonstante) deutlich in Erscheinung. Der Hauptvektor dieser Harmonischen liegt in der Abbildung bei  $\alpha = 0,5$ ; entsprechende Spuren hinterlassen natürlich auch die Oberwellen des untersuchten Schwingungszuges (Effekte höherer Ordnung). Sie liegen bei  $\alpha = 1; 1,5; 2; 2,5; 3$  usw. An den Stellen 1, 2, 3 usw. sind sie wegen des gleichzeitig vorhandenen Hauptvektors der Rastergrundfrequenz nur an dem nicht-sinusförmigen Aufbau der aufgefangenen Strukturen erkennbar; im übrigen kann ihr Vorhandensein sofort an der kleineren Periodenlänge erkannt werden. Ein Sinusraster zeigt diese Erscheinungen nicht, doch ist seine Herstellung ziemlich umständlich. Ein verhältnismäßig einfacher Weg besteht darin, daß man die photographische Platte nicht schräg, sondern parallel zum Analysenraster anordnet, und zwar in einer Ebene, in der die 2. Harmonische des Rasters gegenüber der Grundwelle schon so weit abgeklungen ist, daß im wesentlichen ein sinusförmiges Streifensystem aufgefangen wird. Auf die gleiche Weise kann man auch durch Ausnützung der Effekte höherer Ordnung Sinusraster mit der doppelten, dreifachen usw. Streifenzahl je Längeneinheit erhalten. Man muß nur durch einen passenden Kopierprozeß dafür sorgen, daß der Zusammenhang zwischen aufgefangener Lichtintensität und der Transparenz des Diapositivs linear wird<sup>1)</sup>.

Abb. 9 (S. 281) zeigt nebeneinander das verwendete Originalraster und ein Sinusraster mit der Grundperiode bzw. der 2. Harmonischen.

An einigen ausgewählten Beispielen soll nun die Leistungsfähigkeit des Projektionsperiodographen dargelegt werden. Für die Auflösbarkeit zweier benachbarter Perioden ist unter anderen die gegenseitige *Phasenlage* ausschlaggebend. Wir setzen zunächst voraus, daß es sich um zwei Schwingungszüge handelt, deren Maximalwerte ungefähr an der gleichen Stelle liegen. Abb. 10 (S. 282) zeigt Ausschnitte aus Periodogrammen, bei denen die Phase der beiden Periodizitäten gegeneinander von etwa  $90^\circ$  (a) über  $0^\circ$  (b) zu  $-90^\circ$  (c) verschoben wurde; wenn beide Perioden an der Stelle ihrer größten Amplitude

1) Vgl. etwa: H. Lichte u. A. Narath, a. a. O. S. 245.

gleichphasig liegen, ist die Auflösung unter Umständen in Frage gestellt. Sobald die quasipersistenten Perioden jedoch an verschiedenen Stellen auftreten, werden sie aufgelöst, da beide ihre Phase längs der Abszisse  $\alpha$  in ganz verschiedener Weise verändern. Abb. 11 (S. 282) gibt ein Beispiel; das Verhältnis der beiden im analysierten Schwingungszug vorhandenen Perioden beträgt hier 10:11. Durch die nahe beieinander liegenden Spektren erhält das Periodogramm in diesem Fall ein welliges Aussehen. Sobald in einem Projektionsperiodogramm derartige wellenförmige Strukturen auftreten, liegen demnach einander ablösende Perioden vor.

Wir wollen uns nun noch klarmachen, wie sich die endliche Ausdehnung der Apparatefunktion beiderseits der optischen Achse auf das Spektrum auswirkt. Zu diesem Zweck greifen wir auf Gl. (2) zurück; dort erschien die Apparatefunktion  $A(\xi)$  mit einer „Gewichtsfunktion“

$$H(x - \xi) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x - \xi}{a + b}\right)^2\right]^2}$$

multipliziert. Sie stellt die von einem kleinen Flächenelement der Lichtquelle herrührende Beleuchtungsstärke in einer zu diesem Flächenelement parallelen Ebene dar, die von diesem den Abstand  $a + b$  hat. Durch die Funktion  $H$  wird gleichsam eine „natürliche Selektion“ einander ablösender Periodizitäten in folgender Weise bewirkt.

Betrachtet man das Periodogramm einer ausgedehnten Apparatefunktion  $A(\xi)$  in einem achsenfernen Aufpunkt  $P(x; \xi)$ , dann erhält man nicht das Spektrum von  $A(\xi)$ , sondern das Spektrum von

$$A(\xi) \cdot H(x - \xi).$$

Das Periodogramm ist in der Weise gewichtet, daß in einem Aufpunkt, der von der optischen Achse den Abstand  $x$  hat, nicht das Spektrum von  $A(\xi)$ , sondern das Spektrum von  $A(\xi) \cdot H(x - \xi)$  erscheint; es wird also diejenige Stelle von  $A(\xi)$  bevorzugt analysiert, die bei  $\xi = x$  liegt. Das Spektrum, welches man erhält, wenn man auch achsenferne Punkte in die Betrachtung einbezieht, liefert somit Aufschluß über die Persistenz von Perioden. Nicht persistente, einander ablösende Perioden erscheinen an der Stelle ohne Phasenverschiebung, d. h. mit achsenparallelem Spektrum, wo ihr Zentrum liegt; an den weiter entfernten Stellen verlaufen die Spektren wegen der dann eintretenden Phasenverschiebung zunächst schräg zur optischen Achse, um schließlich ganz zu verschwinden.

V  
4  
1

1  
9  
4  
2

XUM

Zur Beurteilung des Auflösungsvermögens der natürlichen Selektion muß die Halbwertsbreite von  $H$ , bezogen auf die Koordinate  $x$ , berechnet werden. Sie ergibt sich zu

$$\Delta x = (a + b) \cdot 2\sqrt{2 - 1} = 1,29 (a + b).$$

Das bedeutet, daß für  $|x - \xi| = \frac{1}{2} \Delta x = 0,64 (a + b)$  die Fähigkeit des Rasters,  $A(\xi)$  an der Stelle  $\xi$  zu analysieren, auf die Hälfte gesunken ist. An die Stelle der „mittleren Bildhelligkeit“  $E_0$  tritt dabei die von der Ortsvariablen  $x$  abhängige Größe

$$E_0(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) H(x - \xi) d\xi,$$

die in groben Zügen den Intensitätsverlauf von  $A(\xi)$  widerspiegelt. Abb. 12 (S. 283) zeigt ein derartiges, mit natürlicher Selektion aufgenommenes Periodogramm, in dem mehrere einander ablösende Perioden gleicher und verschiedener Frequenz auftreten.

Reicht diese Selektion nicht aus, dann kann man durch Anbringen einer verschiebbaren Blende vor der Funktionsschablone ein interessierendes Analysenintervall herausgreifen; ersetzt man die Blende durch eine Grauscheibe mit exponentiell (etwa nach einer Fehlerverteilungsfunktion) verlaufender Transparenz, dann erhält man ein „Exponentialperiodogramm“<sup>1)</sup>, welches vor allem die unechten Periodizitäten zu unterdrücken gestattet. Dasselbe erreicht man, wenn man die Linienlichtquelle durch eine in passendem Abstand hinter der Milchglasscheibe angeordnete Punktlichtquelle ersetzt; die Breite des Analysenintervalls hängt in diesem Fall vom Abstand Lichtquelle-Milchglasscheibe ab. Man erhält so an Stelle eines scharf begrenzten ein *verlaufendes Analysenintervall*.

Mit der vor der Funktionsschablone verschiebbaren Blende kann man gleichzeitig eine vor dem Analysenraster verschiebbare Blende koppeln und so die verschiedene örtliche Lage der Periodizitäten auch auf der photographischen Platte an verschiedene Stellen bringen. Bei einer derartigen Analyse mit „gleitendem Analysenintervall“ ist aber folgendes zu berücksichtigen.

Durch eine Verengung des Analysenintervalls wird zwar das Auflösungsvermögen für die örtliche *Aufeinanderfolge* einander ablösender Perioden vergrößert, gleichzeitig wird dadurch aber zwangsläufig das Auflösungsvermögen bezüglich der *Frequenz* der Perioden

1) K. Stumpff, a. a. O., S. 155.

verringert, da einem engen Analysenintervall eine breite Spektralfunktion entspricht und umgekehrt. Wenn zu einer Apparatefunktion  $A(z)$  die Spektralfunktion  $F(\alpha)$  gehört, dann bewirkt eine Verminderung der Breite der Apparatefunktion auf  $1/n$  eine Verbreiterung der Spektralfunktion um das  $n$ fache, d. h. wenn

$$\mathfrak{F}\{A(z)\} = F(\alpha),$$

dann ist

$$\mathfrak{F}\{A(nz)\} = \frac{1}{n} F\left(\frac{\alpha}{n}\right)^1.$$

Bezeichnet man etwa die Breite (Halbwertsbreite) des Analysenintervalls, gemessen in der Auffangebene, mit  $\Delta x$  und die Breite der Spektralfunktion im Frequenzmaßstab mit  $\Delta \alpha$ , dann besteht ein Zusammenhang zwischen beiden Größen in Form der „Unsicherheitsrelation“

$$\Delta x \cdot \Delta \alpha \approx 1.$$

Bei der praktischen Periodenforschung hat man also stets zu entscheiden, ob man eine vollständige Beschreibung der örtlichen Aufeinanderfolge der Periodizitäten erhalten und damit ihre Lage im Spektrum ungenau, oder ob man ihre Frequenz genau und infolgedessen ihre örtliche Lage nur ungenau ermitteln will. Abb. 13 (S. 284) zeigt einen mit gleitendem Analysenintervall aufgenommenen Ausschnitt aus dem Spektrum der ebenfalls aufgezeichneten Funktion (c), einmal mit verhältnismäßig breitem Analysenintervall (a) und einmal mit schmalem Analysenintervall (b). Der Zusammenhang zwischen örtlicher und frequenzmäßiger Auflösung ist augenfällig.

### III. Zusammenfassung

Bei der Ausmessung veränderlicher physikalischer Vorgänge erfolgt aus energetischen Gründen eine als „Verwischung“ gekennzeichnete Mittelwertbildung über ein endliches Raum- oder Zeitintervall. Dadurch wird eine Fälschung der ursprünglich vorhandenen Energieverteilung hervorgerufen, die sich als Funktionaltransformation dieser Verteilung darstellen lässt; als Transformationskern tritt dabei die Gewichtsfunktion („Apparatefunktion“) auf, nach der die Mittelwertbildung erfolgt. Von physikalischer Bedeutung ist besonders die Verwischung periodischer Funktionen, die durch die Fouriertransformation erfaßt wird.

Als günstig für die Auflösung periodischer Strukturen erweisen sich Apparatefunktionen vom Typus einer Fehlerverteilungskurve.

1) „Ähnlichkeitssatz“ der Fouriertransformation.

Die bei vielen physikalischen Meßmethoden auftretenden Apparatefunktionen, die einem rechteckigen oder runden Diaphragma entsprechen, sind in dieser Hinsicht ungünstig.

Die Durchführung der Fouriertransformation erfolgt bei empirischen Funktionen

- a) mit dem verschiebbaren Hyperbelraster und
- b) mit dem Projektionsperiodographen.

Der letztere gestattet vor allem eine äußerst bequeme Durchmusterung empirischer Funktionen auf versteckte Periodizitäten, wozu nur die Herstellung einer Schablone erforderlich ist. Frequenzen und Phasen können sofort, Amplituden nach Herstellung einer photographischen Kopie unter Verwendung eines Graukeils abgelesen werden. Durch Anwendung eines „gleitenden Analysenintervalls“ kann eine beliebig strenge örtliche Trennung quasipersistenter Perioden erreicht werden.

Köln, Mainzer Str. 24.

(Eingegangen 17. Januar 1942)

***Absorptionsmessungen von Ultraschallwellen  
in elektrolytisch leitenden Lösungen******Von Walter Rüfer***

(Mit 5 Abbildungen)

**1. Einleitung**

Nach einer vielbenutzten Formel von Kirchhoff wächst der Schallabsorptionskoeffizient  $\alpha$  mit dem Quadrat der Frequenz  $\nu$ .  $\frac{\alpha}{\nu^2}$  soll konstant bleiben. Im Hörbereich ist das gut erfüllt.

Die Definition des Absorptionskoeffizienten ergibt sich aus:  $J_z = J_0 \cdot e^{-\alpha z}$ .

$\alpha$  läßt sich also experimentell erfassen durch Messung der Schallintensität  $J$  in verschiedenen Entfernung  $z$  von der Schallquelle.

Als Maß für die Schallintensität dient in der vorliegenden Untersuchung der Schallstrahlungsdruck. Dieser wurde auch von W. Buß<sup>1)</sup> zur Messung der Schallintensität und damit des Absorptionskoeffizienten benutzt. Im Rahmen seiner Untersuchungen, die sich hauptsächlich mit der Absorption organischer Substanzen befaßten, stellte er fest, daß manche Salzlösungen eine außerordentlich hohe Absorption zeigten, während andere sogar eine geringere Absorption zeigten als das reine Lösungsmittel Wasser. Diese Zusammenhänge näher zu untersuchen, sollte das Ziel vorliegender Arbeit sein.

**2. Versuchsaufbau**

Im wesentlichen wurde die Versuchsanordnung von Buß<sup>1)</sup> benutzt.

Als Sender diente die RS 241 in Dreipunktschaltung. Durch Einsetzen verschieden großer Selbstinduktionen konnte ein Frequenzband von 2000—9000 kHz überstrichen werden. Der Piezoquarz lag parallel der Schwingkreiskapazität und hatte eine Grundfrequenz von 570 kHz. Anregung erfolgte nur in ungeradzahligen Vielfachen der Grundfrequenz. Die Meßpunkte entsprechen dem 5., 7., 9., 11., 13. und 15. Teilton.

Zur Aufnahme der zu untersuchenden Flüssigkeit diente ein Glastrog von 54 cm Länge (Abb. 1). Sein vorderer etwa 3 cm langer

1) W. Buß, Ann. d. Phys. [5] 33. S. 143. 1938.

Teil wurde durch eine eingekittete Glasplatte ( $G$ ) abgetrennt und mit Petroleum gefüllt. Hierin befand sich der Schwingquarz ( $Q$ ). Durch ein Fenster von 3 cm Durchmesser in der Glasplatte  $G$ , das mit einer für Ultraschall durchlässigen Folie verschlossen war, traten die vom Quarz ausgehenden Schallstrahlen in die zu untersuchende Flüssigkeit ein.

Der Empfänger wurde gebildet aus einer leichten  $5 \times 5 \text{ cm}^2$  großen Platte ( $P_1$ ), der im Abstand von etwa 3 mm eine gleichgroße

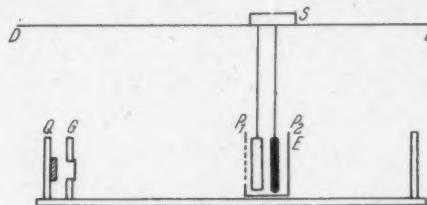


Abb. 1. Versuchsanordnung schematisch.

$Q$ : Quarz,  $G$ : Glasplatte mit Bohrung,  $E$ : Empfangstroß,  
 $P_1$ : leichte,  $P_2$ : schwere Pendelplatte,  $D$ : Doppelschiene,  $S$ : Schlitten

aber schwere Platte ( $P_2$ ) parallel hing (Abb. 1). Beide Platten waren an dünnen Drähten bifilar aufgehängt und tauchten in den mit Petroleum gefüllten Messingbehälter ( $E$ ) (Größe:  $6,5 \times 5 \times 8 \text{ cm}^3$ ). Dieser ließ sich in dem großen Trog verschieben. Er besaß zum Eintritt der Schallstrahlen ein  $5 \times 5 \text{ cm}^2$  großes mit einer Folie überklebtes Fenster. Die Aufhängedrähte waren an einer Schlittenführung ( $S$ ) befestigt, die längs des Troges entlang der Doppelschiene ( $D$ ) verschoben werden konnte. Der Abstand der Platten war durch eine Mikrometerschraube einstellbar und wurde konstant gehalten. Die leichtere Platte wurde durch den aufstreffenden Schallstrahl ausgelenkt. Sie war, um störende Reflexion zu vermeiden, mit einer 1 cm dicken Schicht Asbestwolle bekleidet. Eine optische Beobachtung des Strahlenganges ließ eine genaue Kontrolle zu, ob stehende Wellen vermieden waren. Zur vollständigen Vermeidung der stehenden Wellen erwies es sich auch erforderlich, das Eintrittsfenster des „Empfangstroges“ nicht senkrecht zum Schallstrahl zu stellen, sondern um einige Grad zu neigen. Die beiden Pendelplatten bildeten die Kapazität  $C_z$  der nachfolgend beschriebenen Gustafssonschen<sup>1)</sup> Anordnung in der von mir angewandten Form.

1) G. Gustafsson, Ann. d. Phys. [5] 22. S. 507. 1935.

Abb. 2 zeigt das Schalschema.  $L_A$  und  $L_G$  sind schwach induktiv gekoppelt. Sind die beiden Kreise hinreichend gegeneinander verstimmt, so entsteht keine Schwingung und der Anodenstrom ist konstant. Nähert man aber die Eigenfrequenz des einen Kreises der des anderen, so wird eine Schwingung erregt und der Anodenstrom sinkt steil ab bis zu einem Minimum. Weitere Änderung der Frequenz dieses Kreises läßt ihn dann wieder auf den ursprünglichen Wert ansteigen. Zu bemerken ist noch, daß die

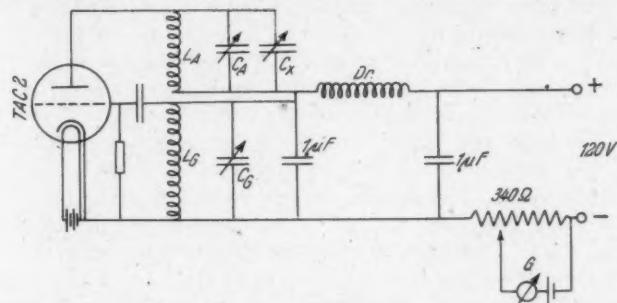


Abb. 2. Schalschema der Kapazitätsmeßanordnung nach Gustafsson

Rückkopplungsspule ( $L_G$ ) „falsch gepolt“ sein muß, um reproduzierbare Verhältnisse zu erhalten; anderenfalls erfolgt die Anodenstromänderung sprunghaft. Diese Anordnung ist gegen kleine Kapazitätsänderungen sehr empfindlich.

Wie schon Buß<sup>1)</sup> festgestellt hat, ist die Änderung des Anodenstromes der Abstandsänderung der Platten von  $C_x$  ausreichend proportional. Eine Nachprüfung bestätigte dies. Gemessen wurde die Anodenstromänderung über eine Kompensationsanordnung (vgl. Schalt-schema) mit dem Galvanometer ( $G$ ).

Eine Pendelablenkung von  $10^{-3}$  cm bei einem Plattenabstand von 3 mm entsprach einer Anodenstromänderung von  $2,39 \cdot 10^{-4}$  Amp. Die dieser Auslenkung entsprechende Druckkraft beträgt 0,32 dyn.

### 3. Durchführung der Messungen

Der Schallstrahlungsdruck ist der Schallintensität direkt proportional. Mit vorstehend beschriebener Pendelanordnung wurde nun an 4 Punkten im Abstand von je 10 cm die Schallintensität gemessen und aus  $J_z = J_0 \cdot e^{-az}$  der Absorptionskoeffizient ausgerechnet.

1) W. Buß, a. a. O.

Die Ausblendung des Schallstrahls durch die 3 cm weite Bohrung der eingekitteten Glasplatte (*G*) erwies sich als ausreichend. Es ergab sich nämlich auch bei größtem Abstand des Empfangstroges vom Quarz keine weitere scheinbare Zunahme von  $\alpha$ , d. h. alle in die Flüssigkeit eintretenden Strahlen gelangten auf die vordere Pendelplatte. Zur Füllung des Sende- und Empfangstroges diente Petroleum, und zwar wegen seiner günstigen chemischen Eigenschaften (es löst den Kitt des Troges nicht), seiner geringen Verdunstungsgeschwindigkeit und seiner geeigneten Schallhärte. Als Folien wurden meist 10  $\mu$  dicke Aluminiumfolien benutzt. Doch mußte je nach dem chemischen Verhalten der gerade eingefüllten Flüssigkeit zu anderen Materialien gegriffen werden (Zelloid, Papier, Glimmer, Glas). Die Aluminiumfolie zeigte sich jedoch wegen ihrer großen Durchlässigkeit für Ultraschall und ihrer verhältnismäßig großen mechanischen Festigkeit allen anderen Materialien überlegen.

Trotz der Mittelwertbildung zeigen die erhaltenen  $\alpha/v^2$ -Kurven, daß einzelne Meßpunkte aus der Kurve herausfallen. Die Fehlerquellen, die dies bedingen, können verschiedene sein. Eine geringe Änderung der Heizung der Senderöhre kann eine Intensitätsänderung des Schalles bewirken. Weiterhin kann eine chemische Reaktion der Lösungen mit den Apparateilen stören, sowie das Überkriechen von Petroleum in die Lösung, das sich nie ganz vermeiden ließ. Im allgemeinen ist die Meßgenauigkeit bei hohen Frequenzen der geringen Intensität wegen geringer. Die Temperatur (Zimmer-temperatur) war weitgehend konstant und betrug 18° C. Eine Abschätzung der Meßgenauigkeit ist wegen der vielen nur schwer zu überblickenden Einflüsse auf die Meßanordnung nicht möglich, doch ist sie aus der Streuung der Meßpunkte in den Kurven ersichtlich.

#### 4. Ergebnisse der Messungen

Aus Abb. 3 ist ersichtlich, daß  $\alpha/v^2$  eine lineare Funktion der Konzentration ist, und zwar streben alle Kurven mit abnehmender Konzentration einem Wert zu, nämlich dem für reines Wasser gültigen  $\alpha/v^2$  bei der betreffenden Frequenz. Die Werte sind der Arbeit von Buß<sup>1)</sup> entnommen bis auf diejenigen für  $MgSO_4$  (2), die von mir aufgenommen wurden.

Die Unstimmigkeit der beiden  $MgSO_4$ -Kurven ist darauf zurückzuführen, daß sie nicht bei der gleichen Frequenz aufgenommen wurden (Differenz etwa 100 kHz). Außerdem gab Buß seine Kon-

1) W. Buß, a. a. O.

zentration in Gewichtsprozenten der Lösung an, während sich meine Konzentrationsangabe auf Gramm trockene Substanz pro 100 g Lösungsmittel bezieht.

Da die jeweiligen Konzentrationen der von mir untersuchten Lösungen (vgl. Tab. 1) verschieden waren, sind die Einflüsse der einzelnen Salze auf  $\alpha/v^2$  nicht ohne weiteres ersichtlich. Um nun

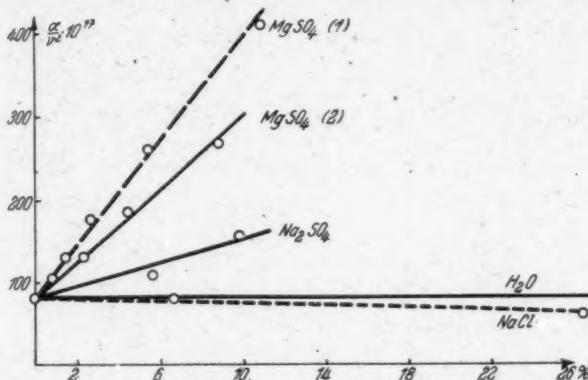


Abb. 3.  $\alpha/v^2$  in Abhängigkeit von der Konzentration einiger Lösungen bei konstanter Frequenz (5160 kHz)

eine Vergleichsmöglichkeit zu haben, wurde unter Berücksichtigung des Kristallwassers eine Umrechnung der experimentell ermittelten Werte von  $\alpha/v^2$  jeweils auf eine Konzentration von 10% (10 g trockene Substanz in 100 g Lösungsmittel) und außerdem auf 1 Mol/Liter vorgenommen. Bei dieser Umrechnung wurde der für die betreffende Frequenz für Wasser ermittelte Wert zugrunde gelegt, d. h. die Differenz zwischen  $\alpha/v^2$  der Salzlösung bei der betreffenden Konzentration und  $\alpha/v^2$  des Wassers gebildet und auf die gewünschte Konzentration (10% bzw. 1 Mol/Liter) umgerechnet.

Tab. 1 zeigt die so gewonnenen Ergebnisse der Messungen. Spalte 2 enthält die Konzentration in Gramm trockener Substanz (ohne Kristallwasser) auf 100 g Lösungsmittel, Spalte 3 in Mol/Liter. Die nächsten 6 Spalten bringen die bei den angegebenen Konzentrationen experimentell ermittelten Werte von  $\frac{\alpha}{v^2} \cdot 10^{17}$  in Abhängigkeit von der Frequenz in kHz. Die darauf folgenden 6 Spalten zeigen  $\frac{\alpha}{v^2} \cdot 10^{17}$  umgerechnet auf eine Konzentration von 10%. Nach Einschalten einer Spalte, die das Molekulargewicht der unter-

V  
4  
1  
1  
9  
4  
2  
XUM

Tabelle 1

Konz. in % Liter	Mol pro Liter	$\frac{\alpha}{p^2} \cdot 10^{17}$ exper. Werte							$\frac{\alpha}{p^2} \cdot 10^{17}$ bei Konz. = 10%							Mole- kulär- ge- wicht $M$	$\frac{\alpha}{p^2} \cdot 10^{17}$ bei Konz. = 1 Mol/Liter				
		2900	4000	5160	6300	7450	8550	2900	4000	5160	6300	7450	8550	2900	4000	5160	6300	7450	8550		
H <sub>2</sub> O	—	—	135	100	77	65	53	50	135	100	77	65	53	50	18	135	100	77	65	53	50
NaCl	14,2	2,44	103	68,5	—	52	51	51,4	113	78	—	56	52	51	58,5	122	87	—	60	52	50
NaBr	17,4	1,7	102	75	54	64	54	47	116	85,5	64	64	54	48	102,9	115	85,5	64	64	54	48
KBr	25	2,1	100	76	67	58	50	121	90	73	62	52	50	119	118	88,5	72	62	51	50	
CuCl <sub>2</sub>	18,7	1,4	326	212	176	154	—	145	237	160	130	113	—	101	134,6	271	180	148	129	—	118
MgCl <sub>2</sub>	10,3	1,08	148	116	82	70	—	70	148	115	82	70	—	70	95,3	147	114	82	70	—	70
Cu(NO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub>	9	0,84	141	—	72	—	62	—	142	—	72,5	—	63	—	188	147	—	87	—	72	—
CH <sub>3</sub> COONa	17,7	2,22	160	135	109	76	75	74	149	119	95	71	64	63	82	146	116	86	70	63	61
NaClO <sub>4</sub>	33,3	3,13	162	113	88,7	78	—	80	143	104	81	69	—	59	106,5	144	104	81	69	—	60
NaClO <sub>4</sub>	27,8	2,28	240	202	130	110	108	93	173	137	96	81	73	65	122,5	181	145	100	85	76	68
MgSO <sub>4</sub>	8,75	0,73	450	350	270	260	258	—	495	386	297	287	—	—	120,4	565	441	341	332	—	—
CaSO <sub>4</sub>	9,1	0,57	460	352	—	278	—	—	492	376	—	299	—	—	159,6	706	542	—	437	—	—
Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	9,7	0,68	273	187	—	135	—	115	—	278	190	—	137	—	117	142	337	228	—	168	—
Na <sub>3</sub> PO <sub>4</sub>	11,4	0,69	—	455	—	—	—	—	—	—	413	—	—	—	—	164	—	615	—	—	—
K <sub>4</sub> Fe(CN) <sub>6</sub>	12,9	0,35	230	167	123	118	—	111	209	152	113	106	—	98	368,2	405	291	208	215	—	—
K <sub>2</sub> Cr <sub>2</sub> O <sub>7</sub>	10	0,34	190	144	101	82	—	74	190	144	101	82	—	74	294,2	295	280	148	116	—	120
K <sub>2</sub> Sn(OH) <sub>6</sub>	16,6	0,55	236	163	—	114	—	—	196	138	—	94	—	—	286,9	321	215	—	153	—	—
UO <sub>2</sub> (NO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub>	12,9	0,32	270	159	131	107	—	88,5	242	147	120	99	—	81	394,1	557	284	247	196	—	170

suchten Salze enthält, folgen wiederum 6 Spalten mit den auf die Konzentration von 1 Mol/Liter umgerechneten Werten. Die Abb. 4 zeigt in kurvenmäßiger Darstellung  $\frac{\alpha}{\nu^2} \cdot 10^{17}$  in Abhängigkeit von

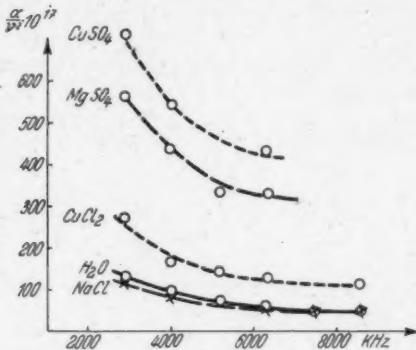


Abb. 4.  $\alpha/\nu^2$  bei der Konzentration 1 Mol/Liter  
in Abhängigkeit von der Frequenz

der Frequenz für 4 Salzlösungen (NaCl, CuCl<sub>2</sub>, MgSO<sub>4</sub>, CuSO<sub>4</sub>) sowie für Wasser, und zwar bei einer Konzentration von 1 Mol/Liter.

##### 5. Diskussion

Aus jeder dieser Kurven geht hervor, daß  $\alpha/\nu^2$  im untersuchten Frequenzbereich nicht konstant ist, wie auch andere Autoren schon feststellten. Bildet man aus 2 solchen Kurven je bei gleicher Frequenz das Verhältnis  $\alpha_1/\alpha_2$ , so erweist es sich unabhängig von der Frequenz. Dieses konstante Verhältnis läßt sich für jedes beliebige Kurvenpaar bestimmen. Paart man etwa jeden Kurvenwert einer Substanz mit dem entsprechenden des reinen Wassers, so ergibt sich eine Zahl, die angibt, um wieviel mal größer die Absorption dieser Lösung ist als die des reinen Wassers. Kennt man dieses Verhältnis für irgend eine Lösung, so läßt sich deren ganze  $\alpha/\nu^2$ -Kurve berechnen, wenn die Kurve des reinen Wassers genau genug bekannt ist. Denn aus der Beziehung  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \text{const}$  geht hervor, daß die verhältnismäßige Absorption zweier Substanzen für alle Frequenzen gleich ist.

Weiterhin zeigt sich, daß  $\alpha/\nu$  für Wasser annähernd konstant und frequenzunabhängig ist (Abb. 5). Die Kurve  $\frac{\alpha}{\nu} = f(\nu)$  ergibt daher eine waagrechte Gerade. Andererseits ergibt sich aber aus

$\frac{\alpha_{Lg}}{\alpha_{H_2O}}$  = const, daß auch für alle Lösungen  $\alpha/\nu$  konstant sein muß. Das ist auch (innerhalb der Fehlergrenzen) erfüllt, und zwar am besten bei nicht zu großen Absorptionen.

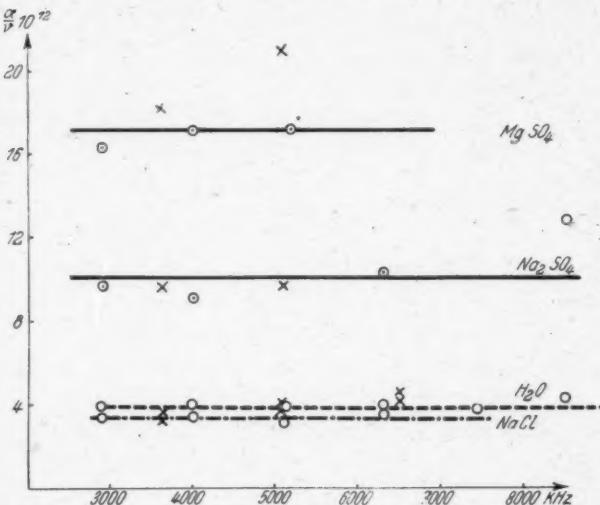


Abb. 5.  $\alpha/\nu$  in Abhängigkeit von der Frequenz.  
x nach Buß; ○ eigene Messungen

Systematische Abweichungen treten nur bei den höchsten benutzten Frequenzen auf. Die Konstanz von  $\alpha/\nu$  ist entschieden besser erfüllt als die Konstanz von  $\alpha/\nu^2$ . Wenn man beachtet, daß bei der geringen Schallintensität der hohen Teiltöne des Quarzes die Messung naturgemäß schwierig wurde, so läßt sich nicht mit Bestimmtheit sagen, daß etwa von 7450 kHz ab nun eine andere Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Frequenz an die Stelle der ermittelten linearen Funktion tritt.

Um die Absorption der Salzlösungen irgend einer Eigenschaft des Salzes bzw. der Ionen zuschreiben zu können, ist es am besten, die  $\alpha/\nu^2$ -Werte für Salze gleicher 1-molarer Konzentration zu betrachten. Denn dabei ist die Zahl der gelösten Moleküle für alle Salze gleich (Tab. 1). Die Zahl der gebildeten Ionen, die ja in Lösung allein vorhanden sind, läßt sich somit ebenfalls leicht überblicken.

Auffallend ist hier zunächst, daß die untersuchten Lösungen der Alkalihalogenide durchweg eine geringere Absorption zeigen als

Wasser. Die Differenz gegenüber dem Wasser verwischt sich mit zunehmender Frequenz. Dies dürfte jedoch auf die zu geringe Meßgenauigkeit zurückzuführen sein. Die Unterschiede der Absorption zwischen den drei untersuchten Lösungen sind selbst wieder sehr gering. Ob ein Einfluß des Ionengewichtes dabei vorliegt, läßt sich deshalb nicht entscheiden.

Um die Absorption der Lösungen einfacher betrachten zu können, wird im folgenden die Absorption des Wassers gleich 1 gesetzt. Die Mittelwerte der relativen Absorptionen für alle untersuchten Substanzen zeigt Tab. 2.

Tabelle 2

$H_2O = 1$	$CH_3COONa = 1,12$	$NaCl = 0,89$
$Na_2SO_4 = 2,54$	$Cu(NO_3)_2 = 1,11$	$Na_3PO_4 = 6,15$
$CuSO_4 = 5,28$	$MgCl_2 = 1,09$	$K_4Fe(CN)_6 = 2,95$
$MgSO_4 = 4,40$	$CuCl_2 = 1,93$	$K_2Cr_2O_7 = 2,20$
$NaClO_4 = 1,37$	$KBr = 0,88$	$K_3Sn(OH)_6 = 2,30$
$NaClO_3 = 1,05$	$NaBr = 0,85$	$UO_3(NO_3)_2 = 3,02$

Multipliziert man diese Werte mit  $\alpha/v$  des Wassers ( $\approx 4 \cdot 10^{-12}$ ), so ergeben sich die absoluten Werte  $\alpha/v$  für die angegebenen Lösungen. Es ist daher gleichgültig, ob wir zu den folgenden Betrachtungen die Zahl der Tab. (2) oder die mit dem Faktor  $4 \cdot 10^{-12}$  multiplizierten Zahlen benutzen.

Den Alkalihalogeniden sind hier Werte um 0,88 zugeordnet. Man könnte diese Erscheinung so deuten: Die Alkali- und Halogenionen sind sehr einfache Gebilde. Sie können auf Grund ihrer wenigen Freiheitsgrade nur wenig Energie aufnehmen, jedenfalls weniger als Gebilde, die Schwingungen und Rotationen ausführen können. In der Lösung ist nun ein Gemisch von  $H_2O$ -Molekülen, Halogenionen und Alkaliionen vorhanden. Es läßt sich rein qualitativ erwarten, daß der Absorptionskoeffizient dieses „Gemisches“ ein Mittelwert der Absorptionskoeffizienten der Komponenten sein wird. Dies soll jedoch eine rein qualitative Betrachtung sein. In Wirklichkeit sind die Verhältnisse zweifellos komplizierter wegen der Anlagerung von  $H_2O$ -Molekülen an die Ionen.

Für die Auswahl der weiter untersuchten Substanzen waren folgende Gesichtspunkte entscheidend: Die Lösungen mußten ihrem chemischen Charakter nach mit den Baustoffen der Apparatur, mit denen sie in Berührung standen, verträglich sein. Dies schloß insbesondere eine Untersuchung von Laugen und stark alkalisch reagierenden Lösungen aus. Die stark alkalische Reaktion des  $Na_3PO_4$  machte z. B. die Aufnahme einer vollständigen Meßreihe, die einige

V  
4  
1  
1  
9  
1  
9  
4  
2  
XUM

Stunden in Anspruch nahm, unmöglich, so daß ich mich dabei mit der Messung bei einer Frequenz (4000 kHz) begnügen mußte. Ungünstiges chemisches Verhalten oder mangelnde Schallintensität sind der Grund dafür, daß nicht bei allen Lösungen die Absorption bei sämtlichen verfügbaren Frequenzen bestimmt wurde.

Weiter war für die Auswahl entscheidend, daß untersucht werden sollte, ob das Ionengewicht einen Einfluß auf die Absorption ausübt. Es wurden dementsprechend Salze mit großem Anionengewicht und solche mit großem Kationengewicht gewählt.

Wie aus Tab. 2 ersichtlich ist, kann ein Einfluß dieser Ionengewichte auf die Absorption nicht durchweg festgestellt werden. Immerhin läßt das Beispiel  $MgSO_4$ ,  $CuSO_4$ ,  $Na_2SO_4$  einerseits und  $MgCl_2$ ,  $CuCl_2$  andererseits darauf schließen, daß bei gleichem Anion die Absorption mit steigendem Kationengewicht zunimmt.

Dieses Beispiel zeigt außerdem, daß man unter der Voraussetzung, daß sich die Absorptionsgröße additiv aus den Absorptionsgrößen der Ionen zusammensetzt, aus den experimentell bestimmten relativen Absorptionskoeffizienten dreier analog zusammengesetzten Salze den des vierten berechnen kann. Es sei in folgender formelmäßiger Darstellung die relative Absorption mit den entsprechenden chemischen Symbolen bezeichnet. Unter der gemachten Voraussetzung ist dann:

$$H_2O + Cu + SO_4 = 5,28,$$

$$H_2O + Cu + 2Cl = 1,93,$$

$$H_2O + Mg + SO_4 = 4,40,$$

daraus ergibt sich:

$$H_2O + Mg + 2Cl = 1,05.$$

Der experimentell ermittelte Wert beträgt 1,09 ( $MgCl_2$ ).

Einen starken Einfluß auf die Absorption übt auch offenbar die *Wertigkeit des Anions* aus. Dies zeigt das Beispiel  $NaClO_4$  ( $\alpha_{rel.} = 1,37$ ),  $Na_2SO_4$  ( $\alpha_{rel.} = 2,54$ ) und  $Na_3PO_4$  ( $\alpha_{rel.} = 6,15$ ). Die Säurereste sind ihrem Gewicht nach nur wenig verschieden und entsprechen sich in ihrer Zusammensetzung. Die Absorption des Na-Ions ist nach den obigen Betrachtungen sicherlich gering, so daß auch die Verdopplung und Verdreifachung der Zahl der Na-Ionen ein derart starkes Ansteigen nicht erklären kann. Man muß schon der Wertigkeit des Säurerestes einen starken Einfluß auf die Absorption zuschreiben, der sich jedoch hier quantitativ nicht fassen läßt.

Die Abhängigkeit der Absorption von der *Wertigkeit des Ions* läßt sich etwa folgendermaßen deuten: Jedes Ion umgibt sich in-

folge elektrostatischer Anziehung mit Wassermolekülen, und zwar mit einer um so größeren Zahl, je höher seine Ladung ist. Es erscheint nun recht plausibel anzunehmen, daß derartige Zusammenballungen von  $H_2O$ -Molekülen und Ionenträger in ihren Bewegungen sind als freie Moleküle bzw. Ionen und infolgedessen schnellen Schwingungen nicht so gut folgen können wie diese.

Der Einfluß der Wertigkeit ist allerdings bei vollständig verschiedenen Säureresten durchaus nicht entscheidend, wie etwa das Beispiel  $K_4Fe(CN)_6$  zeigt. Die komplizierte Zusammensetzung, das große Gewicht und die hohe Wertigkeit des Anions lassen eine entschiedene stärkere Absorption erwarten als tatsächlich vorliegt.

Auch bedingt ein zusammengesetztes Anion durchaus nicht immer eine starke Absorption. Dies zeigt  $Cu(NO_3)_2$ , das nur wenig stärker absorbiert (1,11) als reines Wasser. Wenn man diesen Wert mit dem des Uranylnitrats vergleicht (3,02), so zeigt der starke Anstieg der Absorption gegen  $Cu(NO_3)_2$  offenbar wieder einen Einfluß des *Kationengewichtes*. Allerdings könnte hier auch die etwas kompliziertere Zusammensetzung des Kations eine Rolle spielen. Doch dürfte dies nicht entscheidend sein, wie aus Messungen von Buß an  $NH_4Cl$  hervorgeht. Er fand nämlich trotz des zusammengesetzten Kations, daß  $NH_4Cl$ -Lösung geringer absorbiert als reines Wasser, bei unserer Betrachtung also in die Gruppe der Alkalihalogenide einzuordnen ist.

Da die mir zugänglichen Arbeiten anderer Autoren sich nur mit Absorptionsmessungen in von mir nicht untersuchten Flüssigkeiten, insbesondere organischer Natur befassen, ist nur eine Vergleichsmöglichkeit mit den Ergebnissen von Buß gegeben. Kleine Unstimmigkeiten der beiden Ergebnisse dürften wohl darauf zurückzuführen sein, daß Buß seine Messungen in einem Zinktrog durchführte. Es muß also immer mit der Anwesenheit von Zinkionen gerechnet werden. Weiterhin benutzte er als Absorber an der auslenkbaren Pendelplatte Kork, dessen anfänglich gute Absorption nach meinen Erfahrungen mit der Zeit nachläßt, so daß stehende Wellen auftreten können. Bei seinen Konzentrationsangaben fehlen auch Angaben über Kristallwasser, so daß eine genaue Fassung der Konzentration und Umrechnung auf ein Mol pro Liter nicht möglich ist. Weiter gelang es mir, die Empfindlichkeit der Gustafssonschen Schaltung um fast eine Größenordnung gegenüber der von Buß benutzten zu steigern und durch geeignete Maßnahmen die Störanfälligkeit zu senken. Dadurch waren Messungen bei geringerer Intensität möglich, was unter anderem zur Vermeidung störender Strömungen in der Flüssigkeit von Nutzen ist.

V  
4  
1  
9  
1  
4  
2  
XUM

#### 6. Zusammenfassung

Mit Hilfe einer empfindlichen Kapazitätsmeßanordnung wurde der Schalldruck in verschiedenen Entfernungen von der Schallquelle gemessen und daraus der Absorptionskoeffizient elektrolytisch leitender Flüssigkeiten bestimmt. Die Messungen erstrecken sich auf ein Frequenzgebiet zwischen 2900 und 8850 kHz.

Es wird gezeigt, daß der Absorptionskoeffizient  $\alpha$  eine lineare Funktion der Konzentration ist. Auf Grund dessen wurde zwecks Schaffung übersichtlicher Verhältnisse eine Umrechnung der experimentell ermittelten Werte von  $\alpha/v^2$  auf eine Konzentration von 10% und ein Mol pro Liter vorgenommen.

Es ergab sich das Verhältnis  $\alpha_1/\alpha_2$  zweier Lösungen, jeweils bei der gleichen Frequenz gebildet, als frequenzunabhängig. Weiterhin zeigte sich, daß die Konstanz von  $\alpha/v$  bedeutend besser erfüllt ist als die von  $\alpha/v^2$ .

Die vergleichende Betrachtung der Ergebnisse läßt eine Deutung der Zusammenhänge, die den Absorptionskoeffizienten bestimmen, als sehr schwierig erkennen. Ein Beispiel zeigt die additive Zusammensetzung des Absorptionskoeffizienten aus denen der Ionen. An weiteren Beispielen wird gezeigt, daß neben dem Ionengewicht, der Ionenkonstitution und der Wertigkeit noch unbekannte Einflüsse bestehen, die sich überlagern und eine einfache Betrachtung der Absorptionsvorgänge noch nicht möglich machen.

Herrn Prof. Cermak möchte ich für seine stete freundliche Förderung meinen Dank aussprechen.

Die Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Gießen durchgeführt.

Gießen, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 1. März 1942)

### *Die Quartiken auf den Regelflächen der Raumgitterinterferenzen*

*Entgegnung auf die Bemerkungen des Herrn Wilhelm Maier  
(Bernau a. Chiemsee), in Ann. d. Phys. Bd. 40. S. 85—120. 1941*

*Von H. Seemann*

Bei allen röntgenoptischen Aufnahmeverfahren mit *räumlich* konvergent oder divergent einfallenden monochromatischen Primärstrahlbüscheln liegen die Reflexstrahlen auf kegelähnlichen Regelflächen, die im praktisch und geometrisch günstigsten Falle Rotationskegelmäntel sind. Bei der erstmalig 1930<sup>1)</sup> beschriebenen Anordnung, in der die punktförmige Strahlenquelle (Brennfleck oder Punktdiaphragma) außerhalb des Kristalls angeordnet ist, bildet diese das geometrische Büschelzentrum des Gesamtstrahlenganges. Auch in diesem Sonderfalle liegt jeder Teil des gesamten räumlichen Primärstrahlbüschels, der an einer der Strukturflächen zur Reflexion gelangt, auf einem Kreiskegelmantel, unabhängig von der Form und Neigung der bestrahlten Oberfläche zu der Strukturfläche. Wenn die Oberfläche eine beliebige Ebene ist, reflektiert jeweils nur ein streng kegelschnittförmiger schmaler Streifen (Isokline) der Oberfläche jeden einzelnen Primärkegel. „Das von diesem Kegelschnitt ausgehende Strahlenbündel dagegen bildet keineswegs einen Kreiskegel, sondern eine komplizierte Regelfläche, deren Querschnitt an ihrer schmalsten Stelle eine Ellipsenkurve  $S_1 S_0$  ist.“ „Sie (letztere) ist nur erwähnt worden, um zu zeigen, daß die Projektionsellipse kein Kreiskegelschnitt ist.“ „Das projizierende Strahlenbündel ist kein Kreiskegelmantel.“ „Formel (4) (vom 3. Grade) ist auf Kreiskegel nicht anwendbar.“ „Der Unterschied des Kreiskegelschnittes gegenüber der hier behandelten Regelfläche erhellt am besten aus Abb. 6.“ „Zum Schluß mag noch die Frage erörtert werden, bei welchen spektroskopischen Methoden die reflektierten Strahlenbündel die Gestalt der obigen Regelfläche besitzen und bei welchen Anordnungen sie Kreiskegelmäntel bilden.“

Diese Zitate aus verschiedenen Teilen der genannten Arbeit des Verf. dürfte den Leser der Annalen der Physik überzeugen, daß die Reflexkurven auf den Diagrammen als höhere Kurven

1) H. Seemann, Ann. d. Phys. [5] 7. S. 633—648. 1930.

erkannt wurden. Die zahlreichen Abbildungen, insbesondere Abb. 7, belehren eingehend darüber<sup>1)</sup>.

Herr W. Maier läßt das in seiner in der Überschrift genannten Abhandlung von 1941 nicht gelten, sondern schreibt sich selbst diese erstmalige Erkenntnis zu, nachdem er Schritt für Schritt den Ableitungen des Verf. gefolgt ist und auch das Erzeugungsverfahren der fraglichen Regelflächenschnitte aus Abb. 7 und dem zugehörigen Text entnommen hat. Es ist die bekannte Rotation einer Sehne des Ausgangskegelschnittes um einen Pol seiner Fläche, hier auf der Hauptachse, und die cissoidale Anlagerung dieser Sehnenlänge an den gleichen oder einen Parallelpol. Verf. fand sie in Wieleitners Auszug aus den beiden Standardwerken über spezielle ebene Kurven von Loria und Teixeira auf S. 13<sup>2)</sup>), Herr Maier im Loria selbst. Damit hat sich auch die Voraussetzung des Verf. bewährt, daß der geometrisch Bewanderte sich auch ohne Hinweis zurechtfindet, wenn die Kurven sein mathematisches Interesse erregen<sup>3)</sup>.

Trotz aller dieser entgegenstehenden Tatsachen kommt Herr Maier an mehreren Stellen seiner umständlichen Darlegungen zu der „Feststellung, daß es sich bei den Reflexkurven, die Seemann als solche 2. Grades anspricht, in Wirklichkeit um Kurven 4. Grades handelt“.

So wertvoll diese Bestätigung der Erkenntnisse des Verf. a. a. O. ist, so wenig glückt es Herrn Maier, die abgeleiteten Quartiken

1) In der Abb. 7 ist der linke Scheitel  $S_1$  der kleinsten Ellipse um 1 mm zu weit nach links geraten, so daß die Verlängerung von  $HH'$  hindurchzugehen scheint.

2) Schon in der II. Fortsetzung der von Herrn Maier zitierten Reihe von Arbeiten hat Verf. bei Bestrahlung von Einkristallen durch zwei gekreuzte Spalte Konchoiden der Geraden (Nikomedes) nachgewiesen, die bekanntlich Quartiken sind. (Ann. d. Phys. 53. S. 461—491. 1917). Sie liegen parallel zur reflektierenden Ebene auf der durch die beiden Spalte und die Isoklinenbedingung gegebenen Regelfläche, die z. B. in die „Darstellende Geometrie“ von Emil Müller, Bd. III (J. L. Krames, Leipzig 1931) als Übungsaufgabe auf S. 289 aufgenommen worden ist.

Für die Lemniskaten, die man bei eben ausgebreiteten Kristallpulvern bei Benutzung von zwei Punktdiaphragmen erhalten kann, fand Verf. ebenfalls eine Quartik, eine Lemniskate, die als isoptische Kurve für zwei außerhalb der Kurvenebene liegende feste Punkte aufgefaßt werden kann:

$$(x^2 + y^2 + d^2 - a^2)^2 - (2a \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha)^2 \cdot y^2 = (2ad \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha)^2,$$

worin  $\alpha$  der Glanzwinkel ist (Phys. Ztschr. 33. S. 755—763. 1932. Dort findet sich der Druckfehler  $\operatorname{tg} 2\alpha$  statt  $\operatorname{ctg} 2\alpha$ ).

3) H. Wieleitner, „Spezielle ebene Kurven“ 1908, Sammlung Schubert, Nr. 56, Abb. 7 und S. 13.

zur kristallographischen Analyse zu verwenden, geschweige denn zu einem Kristallabbildungssystem analytisch zusammenzufassen. Auch er kommt zu der Überzeugung, daß das rein zeichnerische Verfahren zur Ermittlung der Achsenverhältnisse der Diagrammkurven den Vorzug verdiene, übersieht dabei aber die überlegene Einfachheit und Genauigkeit des vom Verf. mit Abb. 8 vorgeschlagenen Verfahrens, wenn man sich dabei eines T-Winkels aus Millimeterpapier bedient. Einen Versuch, ein Diagramm von einer ihm unbekannten bzw. nicht genannten Gitterstruktur zu analysieren, hat Herr Maier wohl aus diesen Gründen nicht gemacht. Über die Bestätigung der Richtigkeit des Steinsalzgitters ist er nicht hinausgekommen, und auch das ist ihm nur mit Hilfe einer ad hoc angenommenen Anomalie der NaCl-Gitterreflexion gelungen (vgl. unten).

Es muß angesichts dieser Sachlage abgelehnt werden, auf die Nomenklaturgründe des Herrn Maier zur Stützung seines angeblichen Fehlernachweises einzugehen, solange es „höhere Ellipsen, höhere Parabeln und höhere Hyperbeln“ beliebig hoher Ordnung, ferner „semikubische Parabeln“, ja sogar „gerade kubische Kreise“ gibt.

Auch das angeführte Beweismittel der Zugrundelegung einer Gleichung 2. Grades für die Ableitungen des Verf. muß versagen, da Herr Maier selbst bei allen seinen Ableitungen Gleichungen 2. Grades zugrunde legt. Das gleiche gilt für die Abbildungen. Abb. 9 ist eine Schar von Kegelschnitten, die für die Ableitungen der nichtelliptischen Kurven bestimmt ist. Die Ableitung selbst konnte nach dem Vorbild der Monographien über spezielle ebene Kurven „dem Leser überlassen werden“, ohne diese Wendung zu gebrauchen, zumal die Kurven als solche kristallographisch unverwendbar sind. Es handelte sich nur um ihr Achsenverhältnis.

Endlich ist es auch unrichtig, daß im vorliegenden Falle die Zeichnungen der Lemniskaten die „charakteristischen“ Einschnürungen aufweisen müßten, denn in den Diagrammen tritt in geschlossener Form nur die ovale Lemniskate auf. Sie allein sind daher zur Vermessung tauglich. Die hie und da sichtbaren Sattelstücke können auch Hyperbeläste sein, denen man mit angenommenen Anomalien nicht beikommen kann.

Wie man sieht, hätte es kaum gelohnt, auf alle diese Fragen einzugehen, wenn Herr Maier seine angebliche Entdeckung von Quartiken in Diagrammen der eingangs beschriebenen speziellen Art nicht auch auf diejenigen Weitwinkeldiagramme bezogen hätte, die grundsätzlich nur Kegelschnitte enthalten können, indem er beiläufig erwähnt: „Hier sei eingefügt, daß Seemann auch noch in seiner Abhandlung über Beugung und Mosaik von Einkristallen im

Weitwinkeldiagramm<sup>1)</sup> im Jahre 1938 an Ellipsen und Hyperbeln für die Reflexkurven festhält<sup>2)</sup>“.

Darauf kann nur mit einer entschiedenen Warnung geantwortet werden, einer derartigen Metathese der Methoden zu folgen, sondern festzuhalten, daß die Umkehr der Strahlenrichtung bei der eingangs beschriebenen Anordnung, wie sie in der von Herrn Maier zitierten Arbeit von 1938 benutzt wurde, dazu führt, daß die Primärstrahlkegel, ohne ihre Form und Lage zu ändern, zu Reflexstrahlkegeln werden und daher nur Kegelschnitte auf dem ebenen Diagramm erzeugen können. Wenn man das eingangs erwähnte Büschelzentrum in den Kristall hineinverlegt, z. B. bei der Schneidenmethode oder dem Kikuchi-Kossel-Verfahren, so werden alle überhaupt auftretenden Regelflächen zu Rotationskegeln, die Diagramme demnach ebenfalls zu reinen Kegelschnittkonfigurationen, wie Verf. schon 1917 und 1919<sup>3)</sup> nachgewiesen hat. Diese monochromatischen Kegel sind nicht mit den polychromatischen Lauekegeln oder gar mit Streukegeln zu verwechseln.

Soweit die Entgegnungen auf die angeblichen Fehlernachweise des Herrn Maier, die folgendermaßen zusammengefaßt werden können:

Der Versuch des Herrn W. Maier, sich die Entdeckung von höheren Kurven auf den vom Verf. 1930 beschriebenen Regelflächen der Raumgitterinterferenzen mit der Begründung zuzuschreiben, Verf. habe die fraglichen Kurven zwar als höhere gekennzeichnet, sie aber dennoch als Kegelschnitte behandelt, und sei daher zu falschen Ergebnissen gekommen, ist unhaltbar.

Die Ansätze und Ableitungen des Verf. sind nicht nur vollständig richtig, sondern nach Art kurzgefaßter Lehrbücher so behandelt worden, daß der geometrisch Ungeübte durch die nicht unmittelbar zum erstrebten kristallbeschreibenden Ziele führenden mathematischen Beziehungen möglichst wenig abgelenkt wird, aber dennoch die nötigen Ansätze und Grundlagen, insbesondere die ausschlaggebenden Abbildungen, zur selbständigen Weiterverarbeitung nach Bedarf vorfindet.

Unabhängig von der Entscheidung über die obigen Fehlerfragen muß vor der von Herrn Maier nahegelegten Übertragung irgendwelcher Beziehungen in der fraglichen Arbeit des Verf. von 1930 auf die älteren und jüngeren reinen *Kegelschnitt*-Weitwinkeldiagramme

1) H. Seemann, *Ergebnisse der Techn. Röntgenkunde*, Bd. VI. S. 186 bis 209. 1938.

2) Vgl. auch H. Seemann, *Phys. Ztschr.* 41. S. 365—380. 1940, und 43. 1942 (im Druck).

gewarnt werden. Quartikendiagramme bieten nicht nur wegen ihrer mathematischen Komplikation fast unüberwindliche Schwierigkeiten für die systematische Kristallbeschreibung, sondern auch das experimentelle Verfahren und die Bedingungen der Aufnahmen sind denkbar ungünstig und nur in Ausnahmefällen anwendbar, wenigstens in der bisher geübten Form. Experimentell ist das Kegelschnitt-Weitwinkelverfahren an Einfachheit und Anspruchslosigkeit an die Kristallgröße und Justierungsgenauigkeit sogar den gewöhnlichen Einkristallaufnahmeverfahren überlegen, von den Eigenschaften der Diagramme ganz abgesehen.

Die weiteren Bemühungen des Herrn Maier, die Deutung auf fallender Linien- und Schwärzungsabweichungen auf meinen Diagrammabbildungen in Einklang mit seinen kristallographischen Berechnungen zu bringen, führen ihn dazu, neue Vorstellungen über das Zustandekommen der Brechung an Kristalloberflächen zu entwickeln, die er in einer prismatischen Riefung von molekularen Dimensionen an der spiegelnden Oberfläche oder in Lamellen zwischen den Netzebenen erblickt. Auch eine anomale Reflexion der Tetrakis-hexaederflächen und eine Reflexion an (120) in dritter Ordnung wird angenommen. Da er die Hinweise vor der Ungenauigkeit der Aufnahmeverhältnisse (S. 643 und 645) als unwahrscheinliche „Mutmaßungen“ zurückweist (S. 87: „— was aber kaum der Fall war und — auch kaum der Fall sein könnte“. S. 111: „Es dürfte nicht der Fall sein“), sieht sich Verf. zur Verhütung unnötiger Leerarbeit der Forschung zu folgender Erklärung gezwungen, ohne zu den physikalischen Möglichkeiten und Konsequenzen der Maierschen Erklärungsversuche irgendwie Stellung nehmen zu wollen:

„Die Ungenauigkeit der Justierung der Filme und Kristalle bei den fraglichen behelfsmäßigen Erstaufnahmen war so groß, daß z. B. die maximale Unsymmetrie in Abb. 13 fast 25% Radiendifferenz, in Abb. 10 und 12 über 10% und in Abb. 11 über 4% beträgt. In letzterer hat sogar der innere Kreis, der durch rotationssymmetrische Spiegelung an der zur Oberfläche parallelen Strukturfläche entsteht, zwei um 2% verschiedene Durchmesser, und die Inzidenzen der Scheitel der stärksten Ellipsenkurven mit anderen Kurven sind links und rechts so verschieden, daß völlig andere Inzidenzfiguren entstanden sind, was sofort in die Augen fällt. Gerade diese Kurvenkonfigurationen in Abb. 11 der fraglichen Arbeit des Verf. bezeichnet Maier als „symmetrisch gleichartig“ (S. 87) und stützt darauf seine Brechungshypothesen.“

„Aus den gekennzeichneten Ungenauigkeitsgründen muß daher jede Auswertung meiner damaligen Diagramme zum Zwecke des Nachweises

so äußerst feiner Linienverlagerungen, wie sie als Folge von Brechungsercheinungen auftreten könnten, vollends aber jeder Schwärzungsvergleich der gedruckten Wiedergaben als Versuch am völlig untaulichen Objekt bezeichnet werden.“

Diese Feststellung ist auch zugleich die Antwort auf die Bemerkung Maiers auf S. 102:

„Eine Anwendung seiner Vorschläge zur Ermittlung der Lage und Öffnung der Röntgenstrahlenkegel, welche die Reflexkurven an Steinsalz erzeugen, hat Seemann für die photographierten Weitwinkeldiagramme an Steinsalz soviel wie nicht gemacht, und sie hätten sich auch nicht durchweg als richtig erwiesen.“

In der Tat reichte in vielen Fällen nicht einmal für diese rein kristallgeometrische Frage die Genauigkeit der Kurvenscheitellage aus, ohne daß dieser Diagrammfehler umgekehrt die Richtigkeit meiner geometrischen Ableitungen beeinträchtigen könnte, auf die Maier mit den letzten Worten zielt. Da er, wie oben erwähnt, keinen Schritt unternommen hat, um sich vom Verf. Originalaufnahmen oder Auskunft über die Aufnahmebedingungen zu verschaffen, mag für die Fernerstehenden hinzugefügt werden, daß auch die Behandlung der Abbildungen im drucktechnischen Reproduktionsverfahren noch Fehlerquellen mit sich bringt, die Schwärzungsvergleiche oder Linienbreitenmessungen gänzlich ausschließen, oft sogar zum völligen Verschwinden schwacher und dünner Linien führen, während andere Linien von fast gleicher Schwärzung im Druck unverhältnismäßig klar und scharf erscheinen. Verf. betrachtet daher die Diskussion über die Beweiskraft seiner Diagrammabbildungen in der fraglichen Arbeit für die Brechungs- und Interferenzhypthesen des Herrn Maier seinerseits als abgeschlossen.

Freiburg i. Br., Rheinstr. 4.

(Eingegangen 11. März 1942)

**Zur Theorie der Keimbildung in Lösungen**  
**Von K. Neumann und A. Miess**

(Mit 1 Abbildung)

Vor kurzem wurden in dieser Zeitschrift<sup>1)</sup> Beobachtungen von Kristallabscheidungen aus übersättigten Lösungen mitgeteilt. In Anlehnung an die alten Versuche von de Coppel<sup>2)</sup> wurden heiß hergestellte Alaunlösungen auf 0, 21 bzw. 40° abgekühlt und die Zeit bis zur Ausscheidung bestimmt. In den Tabellen sind die Molprozente der Lösungen sowie die mittleren Wartezeiten angeführt.

Die Autoren sind der Überzeugung, daß ihre Resultate im Widerspruch mit den allgemeinen Keimbildungsgesetzen stehen. Dieser Irrtum röhrt in der Hauptsache daher, daß sie den Begriff des „Keims“ erkennen, der die Grundlage der Theorie von Volmer<sup>3)</sup> bildet. Die Autoren sehen in einem Keim ein Gebilde von stets der gleichen Größe, während in der Theorie von Volmer die Größe des Keims in gesetzmäßiger Beziehung zu der Übersättigung steht. Dies kommt für einfache Formen zum Ausdruck in der Formel:

$$r_k = \frac{2\sigma V_{II}}{(\mu_r - \mu_{\infty})_{II}} \text{ );}$$

hierin ist

$r_k$  = Radius der in dem Kristallkeim einbeschriebenen Kugel,

$\sigma$  = spez. freie Energie der Kristallfläche gegen die Lösung,

$V_{II}$  = Molvolumen der neu entstehenden Phase,

$\mu_r$  <sub>II</sub> = thermodynamisches Potential des Keimes,

$\mu_{\infty}$  <sub>II</sub> = thermodynamisches Potential der ausgedehnten neuen Phase.

Definitionsgemäß ist  $\mu_r$  <sub>II</sub> =  $\mu_I$ , dem thermodynamischen Potential in der übersättigten Lösung, während  $\mu_{\infty}$  <sub>II</sub> =  $\mu_{I0}$ , dem thermodynamischen Potential in der gesättigten Lösung ist. Die durch Schwankungen zu überwindende Keimbildungsarbeit wird dann

$$A_k = \frac{1}{3} \omega r_k^2 \sigma = \frac{4\omega \sigma^3 \cdot V_{II}^2}{3(\mu_I - \mu_{I0})^2} \text{ ),}$$

1) U. Dehlinger u. E. Wertz, Ann. d. Phys. [5] 39, S. 226. 1941.

2) de Coppel, Ann. de chim. Sér. 5; 6, S. 275. 1875

3) M. Volmer, *Kinetik der Phasenbildung*.

4) a. a. O., S. 88.

5) a. a. O., S. 99.

worin  $\omega$  ein von der Kristallform abhängiger Faktor ist, der für Kristallkeime, die nur eine einzige Flächenart aufweisen, durch das Verhältnis  $\frac{\text{Keimoberfläche}}{r_k^3}$  gegeben ist.

Die Formel für die Häufigkeit der Keimbildung in einer übersättigten Lösung lautet:

$$J = K \cdot e^{-\frac{U_I}{kT}} \cdot e^{-\frac{A_K}{kT} \cdot \frac{1}{1}},$$

wo

$J$  = die Zahl der sekundlich entstehenden Keime,  
 $U_I$  = die Aktivierungsenergie für den Molekelpotenzialübergang aus der Phase I in die Phase II,  
 $K$  = einen annähernd konstanten Faktor,  
 $k$  = die Boltzmannsche Konstante,  
 $T$  = die absolute Temperatur

bedeuten.

Zum Vergleich der Versuchswerte mit der Theorie beachten wir, daß die mittlere Wartezeit  $t$  unter sonst gleichen Umständen ein reziprokes Maß für  $J$  ist. Ferner ist der Faktor  $e^{-\frac{U_I}{kT}}$  innerhalb isothermer Versuchsreihen konstant.

Die Potentiale  $\mu_I - \mu_{10}$  für die den Kristall aufbauende Molekelpotenziale  $\text{KAl}(\text{SO}_4)_3 + 12\text{H}_2\text{O}$  können wir nach Belieben als Summen von Einzelpotentialen darstellen, die wir praktisch so wählen, wie sie am besten zu bestimmen sind. Wir wählen daher als Komponenten 1.  $\text{H}_2\text{O}$  und 2. die Gruppe  $\text{KAl}(\text{SO}_4)_3$  und erhalten

$$\begin{aligned} \mu_I - \mu_{10} &= 12(\mu_1 - \mu_{10})_1 + (\mu_1 - \mu_{10})_2 \\ &= 12RT \ln \frac{p}{p_0} + \left[ RT \ln \frac{x}{x_0} + RT \ln \frac{f}{f_0} \right], \end{aligned}$$

wenn

$p$  = den Wasserdampfdruck,  
 $x$  = den Molenbruch des anhydritischen Salzes  $\text{KAl}(\text{SO}_4)_3$ ,  
 $f$  = seinen Aktivitätskoeffizienten und der Index  
 $_0$  = den Sättigungszustand in der Lösung

bezeichnen.

Durch Messung der Wasserdampfdrucke von  $p_0$  bis  $p$  für die Molenbrüche  $x_0$  bis  $x$  und unter Benutzung der Beziehung

$$(\mu_1 - \mu_{10})_2 = - \int_{x_0}^x \frac{1-x}{x} \cdot d \ln p$$

können die erforderlichen  $\mu_I - \mu_{10}$ -Werte exakt erhalten werden.

1) a. a. O., S. 180.

In Ermangelung dieser Messungen beachten wir, daß die Summanden  $12 RT \ln \frac{p}{p_0}$  und  $RT \ln \frac{f}{f_0}$  sich in den vorkommenden Konzentrationsbereichen bis zu einem gewissen Grade kompensieren, wie eine Überschlagsrechnung unter Heranziehung der bekannten Aktivitätskoeffizienten von  $K_2SO_4$  und  $Al_2(NO_3)_3$ <sup>1)</sup> zeigt.

In grober Näherung kann also  $\mu_1 - \mu_{01} = RT \ln \frac{x}{x_0}$  gesetzt werden. Wir wollen so verfahren und kommen somit zu der gleichen Vereinfachung wie Dehlinger und Wertz — nachdem wir uns überzeugt haben, daß hierin jedenfalls kein entscheidender Fehler steckt.

Somit erhalten wir zur Prüfung die Gleichung in logarithmierter Form

$$\log t = -K_1 + \frac{K_2}{\log^2 \frac{x}{x_0}}.$$

Der leichteren Übersicht halber sind die maßgebenden Daten aus der Tab. 1 jener Arbeit in der folgenden Tabelle, Kolumne 1 und 4, wiederholt.

Tabelle

$T = 294^\circ$  abs. Löslichkeit 5,9 g  $KAl(SO_4)_2$  in 100 g Lösung,  
 $100 x_0 = 0,44$  Molprozent

Molprozente 100 x	$\frac{x}{x_0}$	$\frac{1}{\log^2 \frac{x}{x_0}}$	Mittlere Wartezeit in Std. $t$	$\log t$
4,82	10,96	0,925	1,58	0,199
4,61	10,5	0,96	2,75	0,439
4,41	10,0	1,00	13,5	1,130
4,20	9,55	1,04	39,6	1,598
4,00	9,08	1,09	50,7	1,705
3,83	8,7	1,13	1632	3,213

Hierzu ist noch zu bemerken, daß die Zahl der Meßwerte eigentlich viel zu gering zur Berechnung statistischer Mittelwerte ist. Die Anzahl der Versucherörhrchen müßte daher nach den vorbildlichen Untersuchungen von G. Kornfeld<sup>2)</sup> mindestens verzehnfacht werden. In Rücksicht hierauf wurde auch auf eine Auswertung der noch viel dürftigeren, stark streuenden Daten der Tab. 2 verzichtet.

Die graphische Darstellung zeigt, daß sich die aus den Versuchsdaten ergebenden Punkte — abgesehen von einem heraus-

1) Pearce u. Blackman, Journ. Amer. chem. Soc. 57. S. 24. 1935.

2) G. Kornfeld, Wien. Monatshefte 37. S. 609. 1916.

fallenden — gut der eingezeichneten theoretischen Geraden anpassen und daß von einem Widerspruch jedenfalls keine Rede sein kann. Wir wollen daher versuchsweise die Ergebnisse noch weiter auswerten, wobei wir voraussetzen, daß die Keimbildung tatsächlich homogen

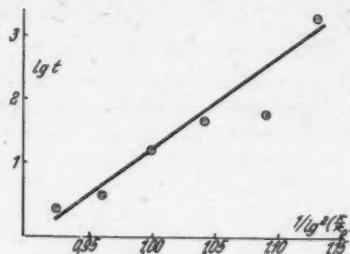


Abb. 1. Mittlere Wartezeit  $t$   
bis zur Kristallisation von Alaunlösungen  
in Abhängigkeit von der Übersättigung  $x/x_s$ .

erfolgt sei. Nehmen wir eine reine Oktaederform der Keime an ( $\omega = 12\sqrt{3}$ ), so können wir aus der Neigung der Geraden die spezifische freie Grenzflächenenergie für die 111-Ebene gegenüber der gesättigten Lösung berechnen und erhalten

$$\sigma = 12,8 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

Dieser Wert ist mit Rücksicht auf die geringe Zahl der experimentellen Punkte und die dargelegte Vernachlässigung als vorläufig zu betrachten. Jedenfalls liegt er in der zu erwartenden Größenordnung.

Hiernach scheint es, daß die Versuchsmethode geeignet ist, bei angemessener Häufung der Beobachtungen und Ausdehnung auf einen größeren Konzentrationsbereich unter gleichzeitiger Bestimmung der Aktivitäten durch Dampfdruckmessungen interessante quantitative Resultate zu liefern, die insbesondere eine hübsche Illustration zu den Gesetzen der Keimbildung abgeben werden.

Diese Gesetze beanspruchen allgemeine Gültigkeit für alle Aggregatzustände, soweit die bei ihrer strengen Herleitung gemachten Voraussetzungen erfüllt sind. Thermodynamisch vollständig instabile Systeme scheiden aus. Dahir gehören quasi eingefrorene Gebilde, die gelegentlich bei fortgeschrittener Unterkühlung von Mischkristallen, Gläsern und dergleichen ausschließlich im festen bzw. erstarrten Zustand erhalten werden können.

V  
4  
1

1  
9  
4  
2

XUM

K. Neumann u. A. Miess. *Theorie der Keimbildung in Lösungen* 323

Bei flüssigen Lösungen endlicher Konzentrationen sind derartige Zustände selbstverständlich nicht realisierbar. Sollte doch einmal ein Zweifel auftreten, so entscheidet ein einfacher Versuch. Man werfe einen fertigen Kristall in die verdächtige Lösung. Ist eine Auslösung zu beobachten, so ist sicher  $A_k > 0$ , d. h. man befindet sich im metastabilen Gebiet, für welches die Keimbildungsgesetze Gültigkeit haben.

Rostock, Berlin, Aus den physikalisch-chemischen Instituten  
der Universität und der Technischen Hochschule, März 1942.

(Eingegangen 8. März 1942)

*Berichtigung zum Aufsatz  
„Angleichung der elektromagnetischen Reflexions-  
und Brechungstheorie an die physikalischen Vorgänge“*

*(O. Schriever, Ann. d. Phys. [5] 40. S. 448. 1941)*

**Von O. Schriever**

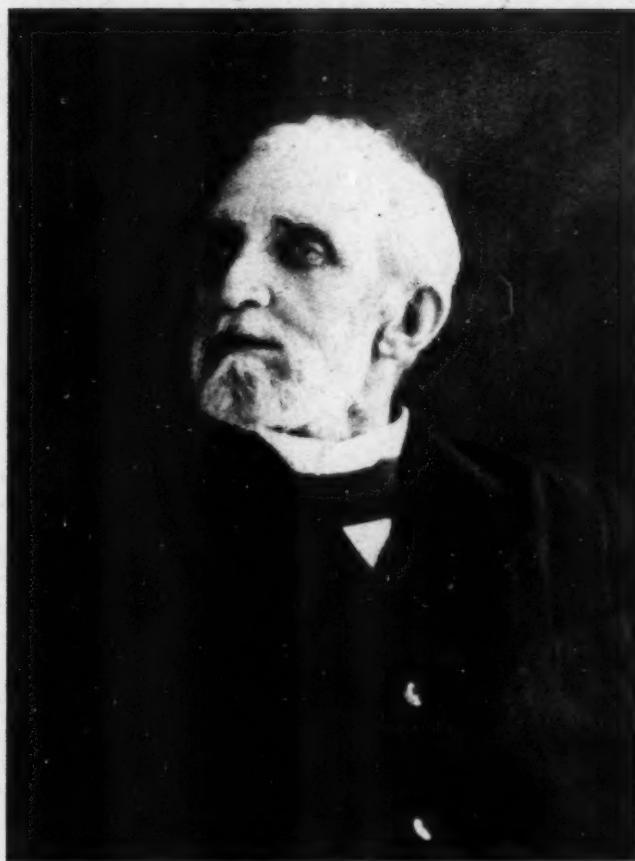
In dem Bestreben, die Erscheinung der Reflexion und Brechung, insbesondere an absorbierenden Medien, dem physikalischen Verständnis näher zu bringen, glaubte Verf. eine verbesserte Angleichung der Theorie an die tatsächlichen Vorgänge gefunden zu haben. Dabei wurde jedoch, worauf die Herren A. Sommerfeld, H. Ott und W. Magnus in dankenswerter Weise aufmerksam machten, übersehen, daß es widerspruchsvoll ist, für Ausdrücke der Form  $F = f \frac{e^{-nr}}{r}$  annähernd ortsunabhängige Endwerte zu errechnen, wenn auch die Faktoren  $f$  Konstanten bedeuten sollen. Wohl ist, bei hinreichend großer Entfernung, das Glied  $1/r$  eine sehr langsam veränderliche Funktion, die bei der Differentiation nach  $r$  unberücksichtigt bleiben kann, nicht so aber die Exponentialgröße  $e^{-nr}$ . Dieser Umstand hat zur Folge, daß in genannter Arbeit die auf den Dämpfungsfall bezüglichen Betrachtungen nicht stichhaltig sind, daß vielmehr die formalen Ergebnisse der herkömmlichen Theorie ihre Gültigkeit behalten. Da aber das komplexe Brechungsgesetz keine unmittelbare Deutung zuläßt, kann trotzdem die physikalische Seite des Problems keinesfalls als hinreichend geklärt gelten. In Fortsetzung seiner Bemühungen in dieser Richtung ist Verf. nun zu einer anschaulichen Vorstellung gekommen, die mit den Ergebnissen der klassischen Theorie in Einklang steht und diese sogar noch zu verallgemeinern gestattet. Ein entsprechender Artikel wird, mit einer zeitbedingten Verzögerung, in einem späteren Heft dieser Zeitschrift erscheinen.

Berlin, Telefunken, den 6. April 1942.

(Eingegangen 8. April 1942)

V  
4  
1

1  
9  
4  
2  
XUM



**PHILIPP LENARD**  
der Altmeister der Experimentalphysik

Zu seinem 80. Geburtstag  
7. Juni 1942

